GEOMETRIA II

A. C. MORGADO
E. WAGNER
M. JORGE

Edição original

Honilton Medeiros

Os Autores

AUGUSTO CESAR MORGADO é mestre em Matemática pelo IMPA e professor aposentado pela Escola Naval. Leciona no Colégio Zaccaria (RJ) e na Fundação Getúlio Vargas. Foi membro da comissão de olimpíadas da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e tem diversos livros publicados no Brasil e no exterior. Uma de suas atividades é a de preparação de alunos para vestibulares do IME e do ITA.

EDUARDO WAGNER é mestre em Matemática pelo IMPA. Foi professor da Escola Naval e leciona em escolas do ensino médio, na Fundação Getúlio Vargas e em cursos de atualização de professores no IMPA.

GEOMETRIA II

A. C. MORGADO
E. WAGNER
M. JORGE

Edição original

FC & Z Livros
Rio de Janeiro
2002

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

Pág.

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO 1

DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM UMA RAZÃO

1.1 — Dizemos que o ponto M divide interiormente o segmento $\overline{AB}$ na razão k quando

$$\frac{MA}{MB} = k$$

A — 8 — M — 2 — B

1.2 — Dizemos que o ponto N divide exteriormente o segmento $\overline{AB}$ na razão k quando

$$\frac{NA}{NB} = k$$

N — A — B

onde MA, MB, NA e NB representam as medidas dos segmentos $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{NA}$ e $\overline{NB}$ e $k > 0$.

Assim, em nosso curso vamos associar ao ponto P e ao segmento $\overline{AB}$ a razão $\frac{PA}{PB}$.

Exemplos

A — M — B

M divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{MA}{MB} = \frac{8}{2} = 4$

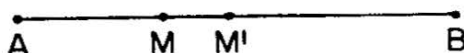
A divide $\overline{MB}$ na razão $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

B divide $\overline{AM}$ na razão $\dfrac{BA}{BM} = \dfrac{10}{2} = 5$

1.3 — TEOREMA

Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão k, existe apenas um ponto M que divide interiormente o segmento nesta razão.

Demonstração

A M M' B

Consideremos um ponto M′ que divida interiormente o segmento na mesma razão. Temos, então,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} \text{ e } \frac{MA + MB}{MB} = \frac{M'A + M'B}{M'B}$$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{M'B} \Longrightarrow MB = M'B$$

Então, $M \equiv M'$.

1.4 — TEOREMA

Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão k, existe apenas um ponto N que divide exteriormente o segmento nesta razão.

Demonstração

Consideremos um ponto N′ que divida exteriormente o segmento na razão. Temos que

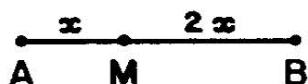
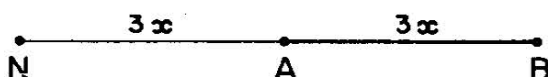
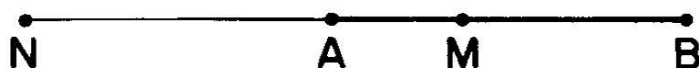
A B N N'

$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B} \text{ e } \frac{NA - NB}{NB} = \frac{N'A - N'B}{N'B}$$

$$\frac{AB}{NB} = \frac{AB}{N'B} \Longrightarrow NB = NB'$$

Então, $N \equiv N'$.

1.5 — OBSERVAÇÃO

Consideremos as divisões abaixo:

Verificamos que, dado um segmento $\overline{AB}$ e uma razão $k \neq 1$ ($\frac{1}{2}$, por exemplo), conseguimos encontrar dois pontos que dividem $\overline{AB}$ nessa razão: um interior e outro exterior. Quando um segmento $\overline{AB}$ está dividido por dois pontos M e N, na mesma razão, dizemos que o segmento $\overline{AB}$ está dividido *harmonicamente*.

DIVISÃO HARMÔNICA

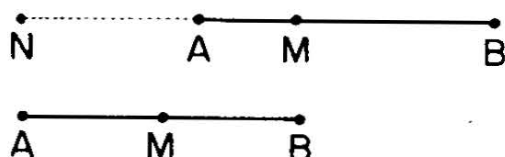
1.6 — DEFINIÇÃO

Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento $\overline{AB}$ quando

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$

Como $\frac{MA}{MB} = k$ e $\frac{NA}{NB} = k$, os pontos M e N dividem o segmento $\overline{AB}$ na mesma razão (um interiormente e outro exteriormente). Estes pontos chamam-se conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão k

1.7 — OBSERVAÇÃO

Quando a razão da divisão harmônica (k) é menor, maior ou igual a 1 (um) verificam-se facilmente as configurações abaixo.

1.8 — PROPRIEDADE

Em uma divisão harmônica existe a relação

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} \pm \frac{1}{AN}$$

$-$ para $k < 1$

$+$ para $k > 1$

1.° caso: $k > 1$

Demonstração

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

A M B N

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB} \qquad \text{ou}$$

$$AM\,(AN - AB) = AN\,(AB - AM)$$

$$AM \cdot AN - AM \cdot AB = AN \cdot AB - AM \cdot AN \qquad \therefore$$

$2\,AM \cdot AN = AN \cdot AB + AM \cdot AB$ e $\div$ por $AM \cdot AN \cdot AB$,

temos

$$\boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}}$$

2.° caso: $k < 1$

Demonstração

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AB + AN}$$

$$AM\,(AB + AN) = AN\,(AB - AM)$$

$$AM \cdot AB + AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AN \qquad \therefore$$

$2\,AM \cdot AN = AN \cdot AB - AM \cdot AN$ e $\div$ por $AM \cdot AN \cdot AB$,

temos

$$\boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}}$$

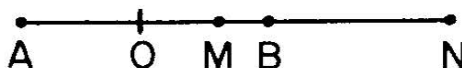
1.9 — PROPRIEDADE

Em uma divisão harmônica existe a relação

$$OA^2 = OM \cdot ON$$

sendo O ponto médio de $\overline{AB}$.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

A O M B N

$$\frac{OM + OA}{OB - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OB}$$

substituindo OB por OA, temos

$$(OM + OA)\,(ON - OA) = (ON + OA)\,(OA - OM)$$

$$OM \cdot ON - OM \cdot OA + ON \cdot OA - OA^2 = ON \cdot OA - OM \cdot ON + OA^2 - OM \cdot OA$$

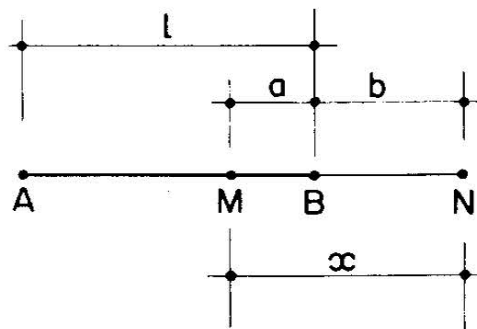
$$2\,OM \cdot ON = 2\,OA^2 \qquad \therefore$$

$$\boxed{OA^2 = OB^2 = OM \cdot ON}$$

1.10 — DISTÂNCIA ENTRE DIVISORES HARMÔNICOS

Sejam M e N conjugados harmônicos de $\overline{AB}$. Assim,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k > 1.$$

Consideremos AB = l e

$\frac{MA}{MB} = k$ dados e calculemos x, que é a distância entre os divisores harmônicos de $\overline{AB}$ na razão $k > 1$.

1) $$\frac{MA}{MB} = k$$

$$\frac{l - a}{a} = k$$

$$l - a = ak \Longrightarrow a = \frac{l}{k + 1}$$

2) $$\frac{NA}{NB} = k$$

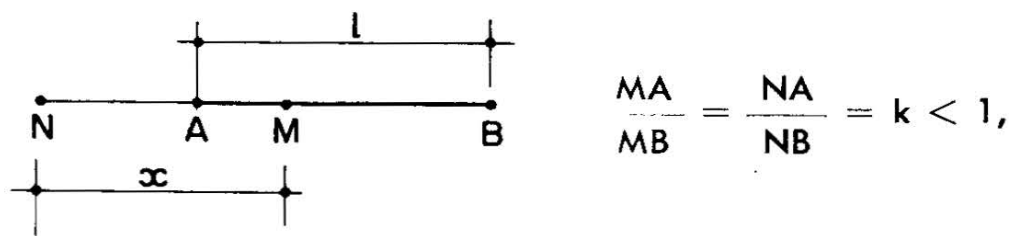
$$\frac{l + b}{b} = k$$

$$l + b = kb \Longrightarrow b = \frac{l}{k - 1}.$$

Por 1) e 2), $x = a + b = \dfrac{l}{k + 1} + \dfrac{l}{k - 1} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{2kl}{k^2 - 1}}$$

Por raciocínio análogo, caso considerássemos $k < 1$,

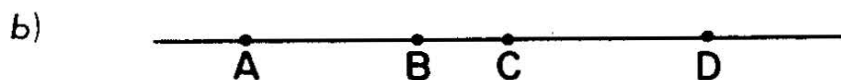
$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k < 1,$$

chegaríamos a

$$\boxed{x = \frac{2kl}{1 - k^2}}$$

1.11 — Sejam A, B, C e D pontos de uma reta.

a) Se $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$, então $\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD}$.

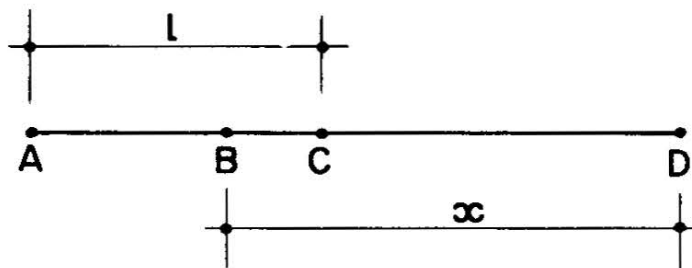
De fato, basta permutar os meios ou os extremos de uma delas.

b)

A B C D

Vimos que B e D são divisores harmônicos de $\overline{AC}$ se A e C forem divisores harmônicos de $\overline{BD}$ e v. v.

Sejam $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} = k > 1.$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD} = k' < 1.$$

A relação entre k e k′ obtém-se da seguinte forma:

Se B e D são divisores harmônicos de $\overline{AC}$.
então, por 1.10,

$$x = \frac{2\,kl}{k^2 - 1} \qquad (1)$$

mas, se A e C dividem harmonicamente BD,

$$l = \frac{2\,k'x}{1 - k'^2} \qquad (2)$$

substituindo (2) em (1),

$$x = \frac{2k}{k^2 - 1} \cdot \frac{2\,k'\,x}{1 - k'^2} \implies$$

$$\implies \boxed{(k^2 - 1)(1 - k'^2) = 4\,kk'}$$ que, resolvida

para k e para k', fornece

$$\boxed{k' = \frac{k - 1}{k + 1}} \quad \text{e} \quad \boxed{k = \frac{1 + k'}{1 - k'}} \qquad \begin{matrix} k > 1 \\ 0 < k' < 1 \end{matrix}$$

1.12 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Um segmento $\overline{AB}$ é tal que 7 AB = 3 CD. Qual será sua medida na unidade $\frac{1}{4}$ CD?

Solução

$$AB = \frac{3}{7}\,CD.$$

Seja $u = \frac{1}{4}CD$ ou $CD = 4u$

$$AB = \frac{3}{7}4u$$

$$\frac{AB}{u} = \frac{12}{7}\ *$$

Resposta: $\frac{12}{7}$

2. Se $AB = 5\ CD$, calcule:

a) $\frac{3\ AB}{CD}$ b) $\frac{5\ AB}{3\ CD}$.

Solução

a) $\frac{3\ AB}{CD} = \frac{3 \cdot 5\ CD}{CD} = 15$

b) $\frac{5\ AB}{CD} = \frac{5 \cdot 5\ CD}{CD} = 25$

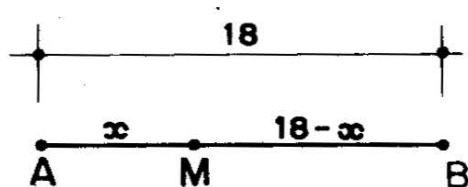
Respostas: a) 15

b) 25

3. Se M divide um segmento $\overline{AB}$, de 18 cm, interiormente na razão $\frac{2}{7}$, calcule MA e MB.

---

* $\frac{AB}{u}$ é a medida do segmento $\overline{AB}$ na unidade u.

Solução

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{x}{18 - x} = \frac{2}{7}$$

$$7x = 36 - 2x$$

$$9x = 36$$

$$x = 4$$

Logo,

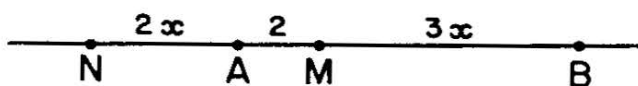
$$18 - x = 14$$

Respostas: $MA = 4$ cm

$MB = 14$ cm

4. Calcule x para que os pontos da figura abaixo formem divisão harmônica.

Solução

2x 2 3x
N A M B

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$$

$$\frac{2}{3x} = \frac{2x}{5x + 2}$$

$$6x^2 = 10x + 4$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \implies$$

$$\implies x = 2$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Resposta: $x = 2$

5. Considere os pontos A, B e C sobre uma reta.

Se $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{5}$, calcule as razões $\dfrac{AB}{AC}$ e $\dfrac{CA}{CB}$

Solução

Se $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{5}$, sejam $AB = 3x$ e $BC = 5x$

3 x 5 x

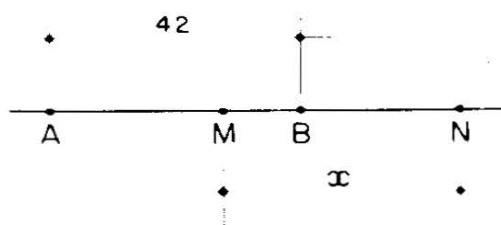
A B C

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}$$

Respostas: $\dfrac{3}{7}$ e $\dfrac{7}{5}$

6. Os pontos M e N dividem o segmento $\overline{AB}$ de 42 cm na razão $\dfrac{5}{2}$. Calcule MN.

Solução

Como $\dfrac{5}{2} > 1$,

temos, por 1.10,

$$x = \frac{2\,kl}{k^2 - 1} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 42}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \frac{5.42}{\frac{21}{4}} = 40$$

Resposta: $x = 40$ cm

7. Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{3}{2}$. Sabemos que os pontos A e B dividem o segmento $\overline{MN}$ harmonicamente. Calcule a razão desta divisão.

Solução

Temos $$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k = \frac{3}{2} > 1.$$

$$\frac{BM}{BN} = \frac{AM}{AN} = k' < 1.$$

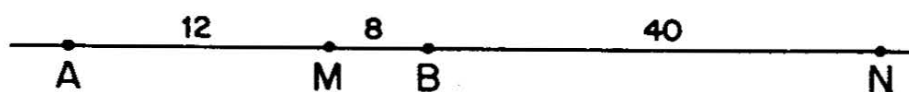
Por 1.11 a) e b) temos

$$k' = \frac{k-1}{k+1} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Resposta: $k' = \frac{1}{5}$

Verificação

Repare agora o leitor na divisão abaixo

A —12— M —8— B —40— N

M e N divisores harmônicos de $\overline{AB}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MA}{MB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ \\ \frac{NA}{NB} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} K = \frac{3}{2}$$

B e A divisores harmônicos de $\overline{MN}$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{BM}{BN} = \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} \\[2ex] \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\rangle k' = \dfrac{1}{5}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

8. Se A, B e C são pontos de uma reta (B entre A e C), sendo AC = 24 e BA = 5BC, então BC mede:

A) 3;
B) 4;
C) 5;
D) 6;
E) NRA.

9. Um segmento AB é tal que 3AB = 4CD. Qual a medida de CD se tomarmos como unidade $\frac{2}{5}$ de AB?

A) $\frac{3}{10}$;
B) $\frac{10}{3}$;
C) $\frac{8}{15}$;
D) $\frac{15}{8}$;
E) NRA.

10. Um segmento AB é igual a 5 vezes um segmento CD. Qual a razão entre $\frac{3}{2}$ AB e 4CD?

A) 6;
B) $\frac{3}{8}$;
C) $\frac{15}{2}$;
D) $\frac{15}{8}$;
E) NRA.

11. Qual a razão entre $\frac{5}{4}$ AB e $\frac{2}{3}$ CD?

A) $\frac{15}{8}$;
C) $\frac{75}{8}$;
B) $\frac{25}{8}$;
D) $\frac{16}{25}$;
E) NRA.

12. Se $AB = \frac{2}{3} CD$ e $CD = \frac{4}{5} MN$, $\frac{AB}{MN}$ é igual a:

A) $\frac{8}{15}$;
C) $\frac{5}{6}$;
B) $\frac{15}{8}$;
D) $\frac{6}{5}$;
E) NRA.

13. Sejam A, B e C nesta ordem sobre uma reta tais que AB = 12 e BC = 3. Seja D conjugado harmônico de B em relação ao segmento $\overline{AO}$. Então, BD mede:

A) 5;
C) 8;
B) 6;
D) 12;
E) NRA.

14. Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.

A) 1;
C) 4;
B) 2;
D) 8;
E) NRA

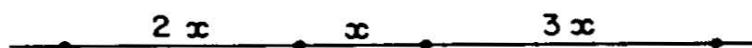
2x 6

15. Determine x para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.

A) 8;
C) 11;
B) 10;
D) 12,
E) 14.

x 6 x+1

16. Considerando a figura abaixo, podemos afirmar que os 4 pontos:

$2x \quad x \quad 3x$

A) nunca formarão uma divisão harmônica;

B) sempre formarão uma divisão harmônica qualquer que seja;

C) formarão uma divisão harmônica se $x > 0$;

D) só formarão divisão harmônica se x for par;

E) NRA.

17. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{3}$. Se $AB = 40$, MN mede:

A) 24;

B) 38;

C) 40;

D) 42;

E) ÑRA.

18. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica. Se $AB = 7$ e $MN = 24$, a razão $\frac{MA}{MB}$ é igual a:

A) 2;

B) $\frac{3}{2}$;

C) $\frac{4}{3}$;

D) $\frac{5}{3}$;

E) NRA.

19. Os pontos P e Q pertencem ao interior do segmento $\overline{AB}$ e estão de um mesmo lado de seu ponto médio. P divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{3}$ e Q divide AB na razão $\frac{3}{4}$. Se PQ = 2 AB mede:

A) 50;
B) 60;
C) 70;
D) 80;
E) 90.

20. Os pontos A, M, B e N de uma reta formam uma divisão harmônica de razão $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$. Se J é o ponto médio de MN, a razão $\frac{JA}{JB}$ vale:

A) k;
B) $2k$;
C) k^2;
D) $k^2 - 1$;
E) NRA.

CAPÍTULO 2

FEIXE DE PARALELAS

2.1 — TEOREMA

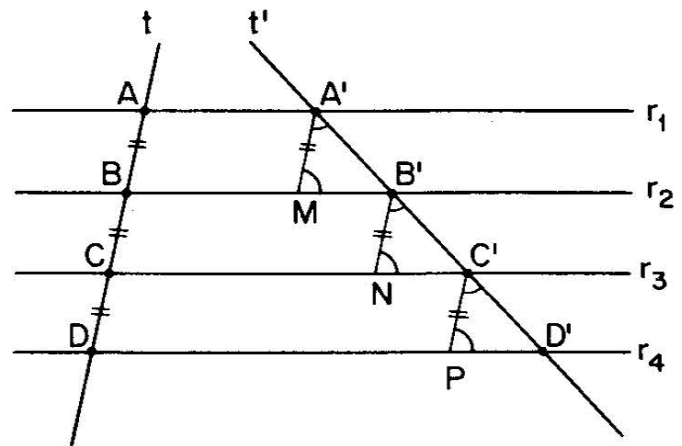
Se um feixe de paralelas determina sobre uma secante segmentos de mesmo comprimento, determinará sobre qualquer outra segmentos de mesmo comprimento.

H — $r_1 \, // \, r_2 \, // \, r_3 \, // \, r_4$

$AB = BC = CD.$

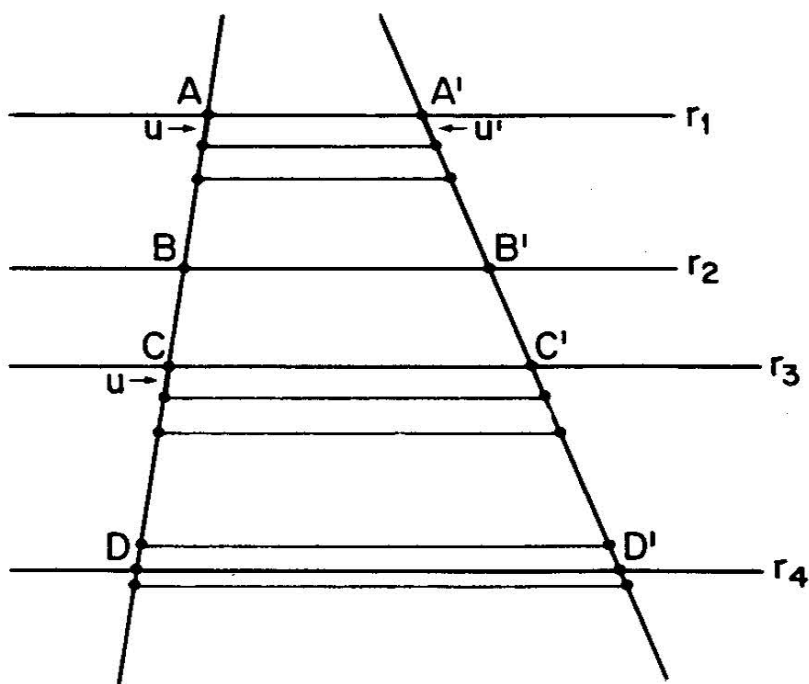
T — $A'B' = B'C' = C'D'$

D — De fato, como os triângulos A'MB', B'NC' e C'PD' são congruentes, pois possuem um lado de mesmo comprimento compreendido entre ângulos respectivamente congruentes,

$A'B' = B'C' = C'D'.$ C.Q.D.

2.2 — Um feixe de paralelas determina sobre duas secantes quaisquer segmentos proporcionais.

H — $r_1 // r_2 // r_3 // r_4$

T — $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'}$

D —

Seja u um segmento que divide exatamente $\overline{AB}$ e cabe m vezes em $\overline{AB}$. Traçando paralelas ao feixe como mostra a figura, encontraremos u′ na outra transversal que divide exatamente $\overline{A'B'}$ e cabe m vezes em $\overline{A'B'}$. Podemos, então, escrever

$$AB = mu \qquad e \qquad CD = mu'$$

É claro que u não tem obrigação de dividir $\overline{CD}$. Assim, marcando u sucessivamente em $\overline{CD}$, vamos supor que D esteja na n-ésima parte, ou seja, entre o (n-1)-ésimo e n-ésimo pontos de divisão. Traçando paralelas ao feixe, vemos que o mesmo se verifica na outra transversal. Podemos, então, escrever

$$(n-1)u < CD < nu \qquad e \qquad (n-1)u' < C'D' < nu'$$

Dividindo a primeira por mu e a segunda por mu′,

$$\frac{n-1}{m} < \frac{CD}{AB} < \frac{n}{m} \qquad e \qquad \frac{n-1}{m} < \frac{C'D'}{A'B'} < \frac{n}{m}$$

ou

$$\frac{m}{n-1} > \frac{AB}{CD} > \frac{m}{n} \qquad e \qquad \frac{m}{n-1} > \frac{A'B'}{C'D'} > \frac{m}{n}$$

se $n \to \infty$, $n - 1 \sim n$, $\dfrac{m}{n-1} \to \dfrac{m}{n}$ e, então, $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$ ou ainda

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Analogamente, podemos escrever

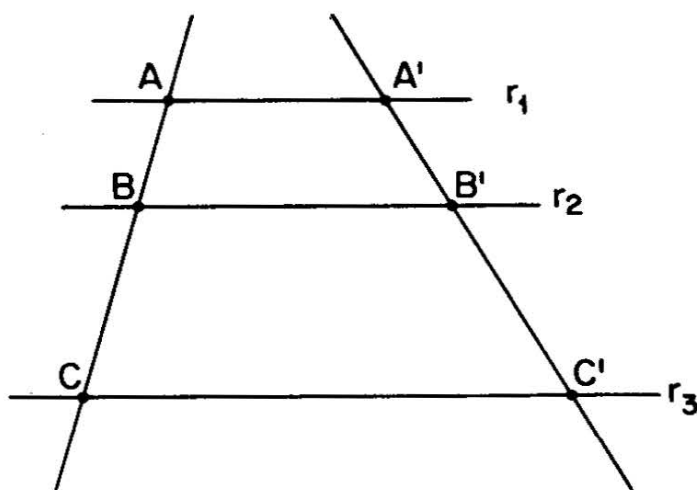
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \dots\dots = \frac{u}{u'}.$$

2.3 — OBSERVAÇÃO

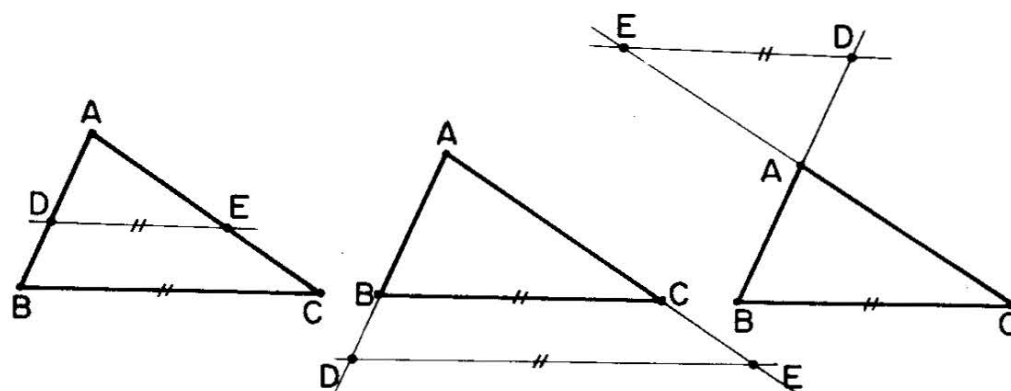
As razões homólogas são iguais em secantes atravessadas por feixe de paralelas.

H — $r_1 \parallel r_2 \parallel r_3$

T — $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

D —

De fato, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \Longrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$.

2.4 — APLICAÇÃO NO TRIÂNGULO

Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina nos outros dois segmentos proporcionais e reciprocamente.

$$\boxed{\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}.}$$

2.5 — TEOREMA

Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro de lados respectivamente proporcionais ao primeiro.

H — $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

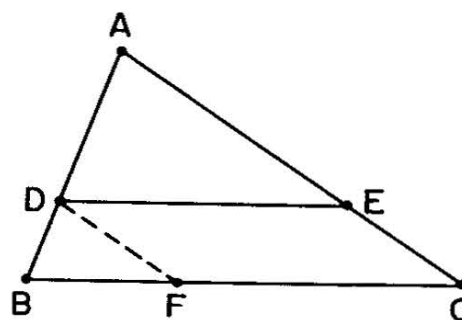
T — $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

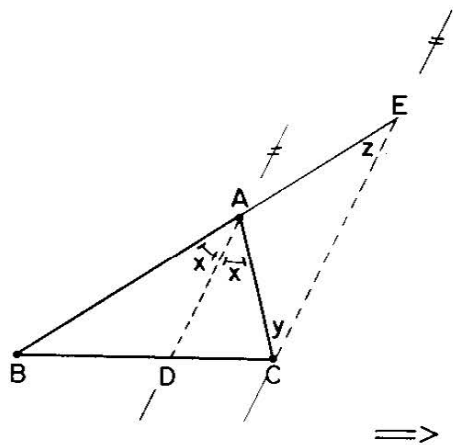
D — Considerando 2.4, temos

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, mas, sendo $\overline{DF} \,//\, \overline{AC}$, temos

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{DE}{BC} \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.}$$

2.6 — TEOREMA DAS BISSETRIZES

As bissetrizes interna e externa de um triângulo dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração

Seja AD a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$.

Tracemos $\overline{CE}$ paralela a $\overline{AD}$. Temos

$\widehat{x} = \widehat{z}$ (correspond.)

$\widehat{x} = \widehat{y}$ (alt. int.)

$\Longrightarrow \widehat{y} = \widehat{z}$.

O triângulo ACE é, portanto, isósceles.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}, \text{ e como } AE = AC,$$

$$\boxed{\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.}$$

Consideremos a bissetriz do ângulo externo $\widehat{A}$ ($\overline{AD'}$).

Tracemos $\overline{CE}$ paralela a $\overline{AD'}$. Temos

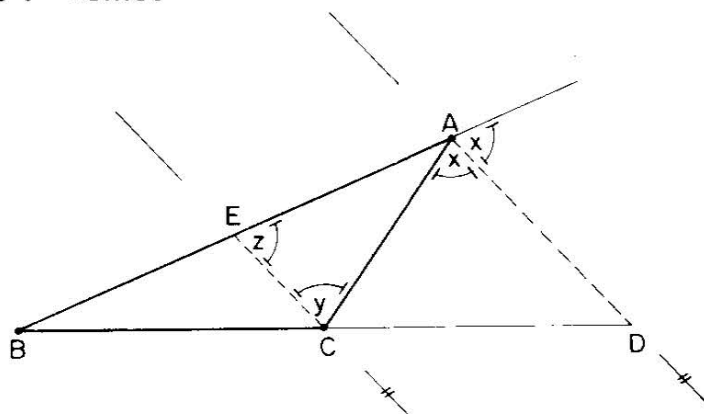
$\widehat{x} = \widehat{z}$

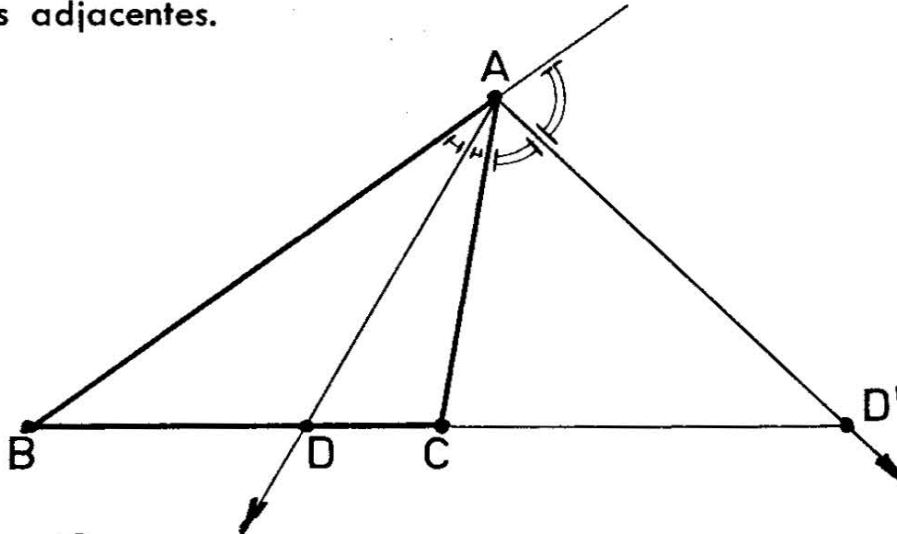
$\widehat{x} = \widehat{y}$

$\widehat{y} = \widehat{z}$.

O triângulo ACE é, portanto, isósceles.

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AE}, \text{ e como } AE = AC,$$

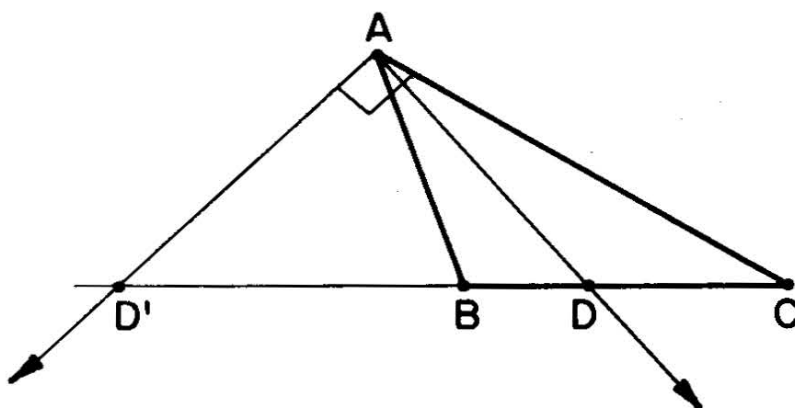
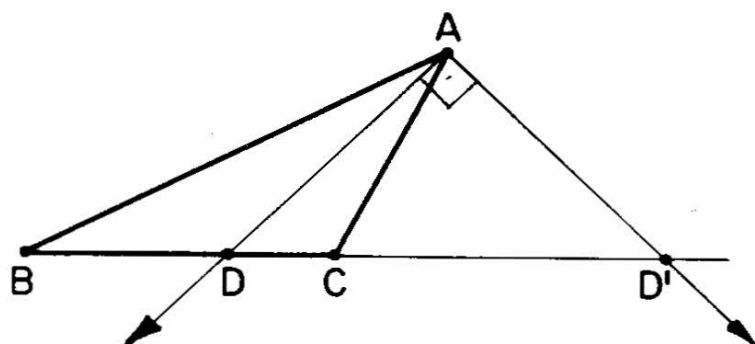
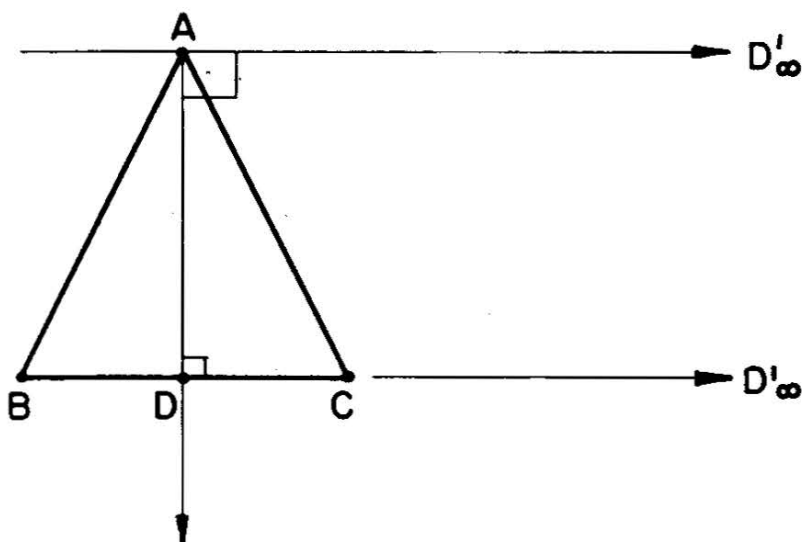
$$\boxed{\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}}$$

2.7 — DIVISÃO HARMÔNICA PELOS PÉS DAS BISSETRIZES

As bissetrizes interna e externa que partem de um mesmo vértice de um triângulo dividem harmonicamente o lado oposto na mesma razão dos lados adjacentes.

Seja $k = \frac{AB}{AC}$ razão dos lados que concorrem em A. Do teorema das bissetrizes, temos

$$\frac{DB}{DC} = k \qquad \frac{D'B}{D'C} = k$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}.$$

O que mostra que D e D' dividem harmonicamente o lado $\overline{BC}$.

Para os casos I e II, podemos escrever

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Longrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}.$$

Assim,

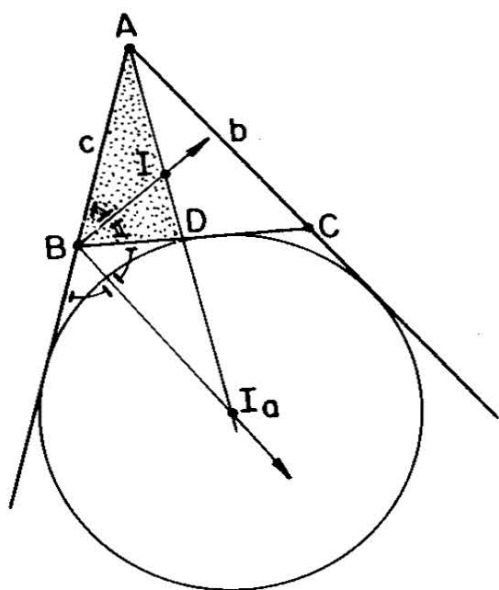
$$DB = \frac{ac}{b+c} \quad \text{e}$$

$$DC = \frac{ab}{b+c}$$

e, analogamente,

$$D'B = \frac{ac}{|b - c|} \qquad e$$

$$D'C = \frac{ab}{|b - c|}$$

2.8 — DIVISÃO DA BISSETRIZ INTERNA, HARMONICAMENTE, PELO INCENTRO E EXINCENTRO

No triângulo ABD, $\overline{BI}$ e $\overline{BIa}$ são bissetrizes interna e externa de B, dividindo $\overline{AD}$ harmonicamente.

A razão da divisão harmônica será

$$k = \frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD}, \text{ mas}$$

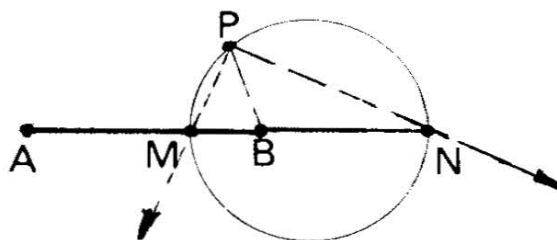
$$BA = C \text{ e } BD = \frac{ac}{b + c}.$$

Então,

$$k = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \Longrightarrow \boxed{k = \frac{b + c}{a}}$$

e, analogamente, para as outras bissetrizes.

2.9 — CÍRCULO DE APOLONIUS

É o lugar geométrico dos pontos P tais que a razão PA/PB é igual a k, sendo k constante e A e B pontos fixos.

Conhecemos os pontos M e N pertencentes ao lugar que são os pontos que dividem o segmento AB interiormente e exteriormente na razão k.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k.$$

Seja P um ponto qualquer do lugar.

Como $\dfrac{PA}{PB} = k,$ $\qquad \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{MA}{MB}.$

Logo, $\overline{PM}$ é bissetriz interna do triângulo PAB. Da mesma forma,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}.$$

Portanto, $\overline{PB}$ é bissetriz externa do ângulo $\widehat{P}$ do triângulo PAB.

Como $\overline{PM}$ e PN são perpendiculares e os pontos M e N são fixos, o lugar geométrico de todos os pontos P é círculo de diâmetro $\overline{MN}$, sendo M e N os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ na razão k.

2.10 — RAIO DO CÍRCULO DE APOLONIUS

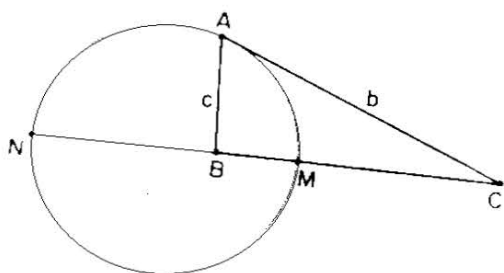
O diâmetro do círculo de Apolonius é a distância entre os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ de comprimento l na razão $k > 0, \neq 1$.

Por 1.10 concluímos que o raio do círculo de Apolonius é dado por

$$r = \frac{kl}{|k^2 - 1|}.$$

Em um triângulo de lados a, b e c, teríamos

$$l = a$$

$$k = \frac{c}{b}. \qquad \text{Logo,}$$

$$r = \frac{\frac{c}{b} \cdot a}{\frac{c^2}{b^2} - 1} \implies$$

$$\implies \qquad r = \frac{abc}{|b^2 - c^2|}.$$

2.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

21. Considere sobre uma reta quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ de comprimentos respectivamente iguais a 8, 10, 12 e 15. Considere numa outra reta os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ proporcionais aos primeiros. Se MN = 10, calcule NP, PQ e QR.

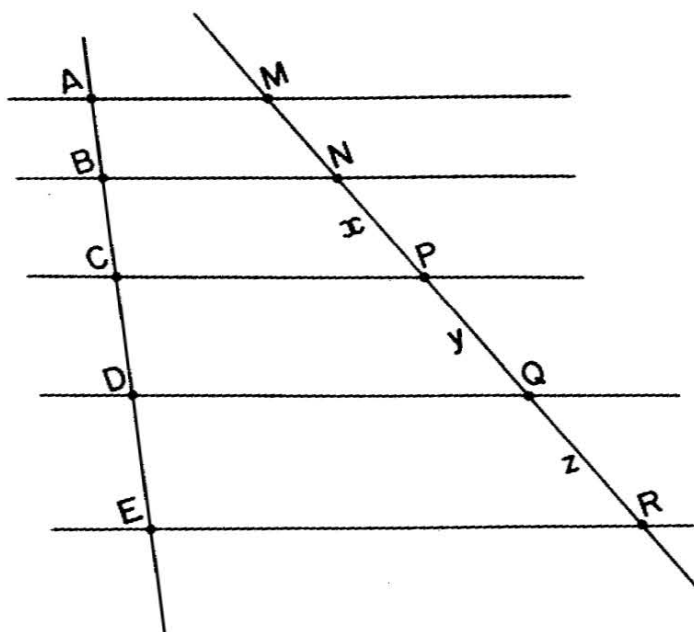
Solução

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DE}{QR}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{x} = \frac{12}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{x} \Longrightarrow x = 12{,}5$$

$$\frac{8}{10} = \frac{12}{y} \Longrightarrow y = 15$$

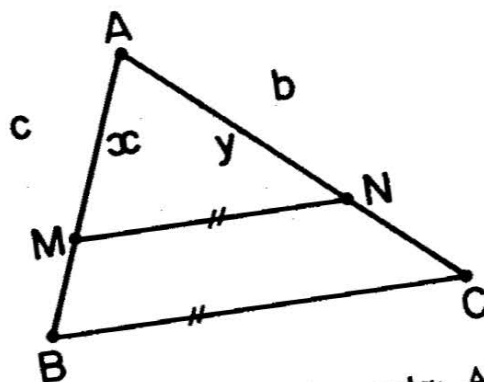
$$\frac{8}{10} = \frac{15}{z} \Longrightarrow z = 18{,}75.$$

Respostas: $NP = 12{,}5$
$PQ = 15$
$QR = 18{,}75.$

22. No triângulo ABC da figura $AB = c$ e $AC = b$. Se $AM = x$ e $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, calcule AN.

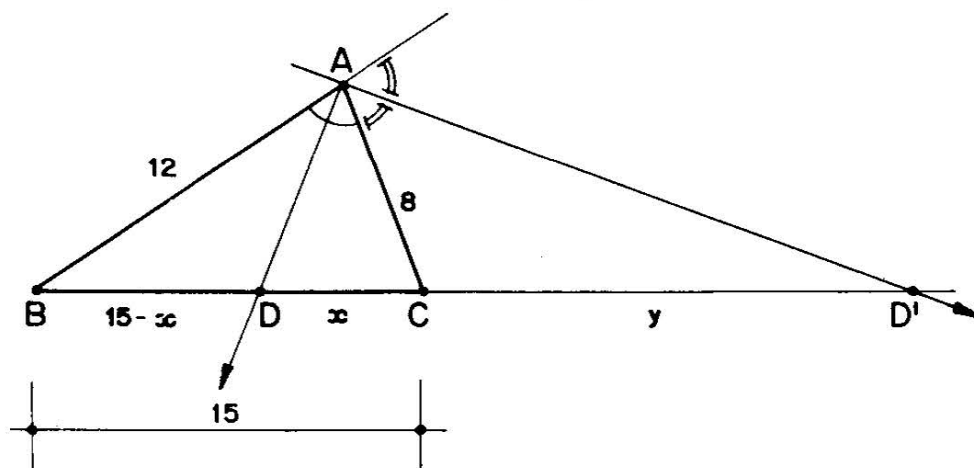
Solução

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = \frac{bx}{c}$$

Resposta: $AN = \frac{bx}{c}$.

23. Considere um triângulo ABC de lados AB = 12, AC = 8 e BC = 15. As bissetrizes interna e externa de $\widehat{A}$ encontram o lado oposto em D e D'. Calcule DB, DC, D'B e D'C.

Solução

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{15 - x}{x} = \frac{12}{8} \implies x = 6$$

$$DC = 6 \quad e \quad DB = 15 - 6 = 9.$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{y + 15}{y} = \frac{12}{8} \implies y = 30$$

$$D'C = 30 \quad e \quad D'B = 30 + 15 = 45.$$

Respostas: DB = 9, DC = 6
D'B = 45, D'C = 30.

24. Em um triângulo ABC, $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{4}$. A bissetriz externa de C encontra a reta suporte de $\overline{AB}$ em P (A entre P e B). A razão $\frac{PA}{AB}$ é:

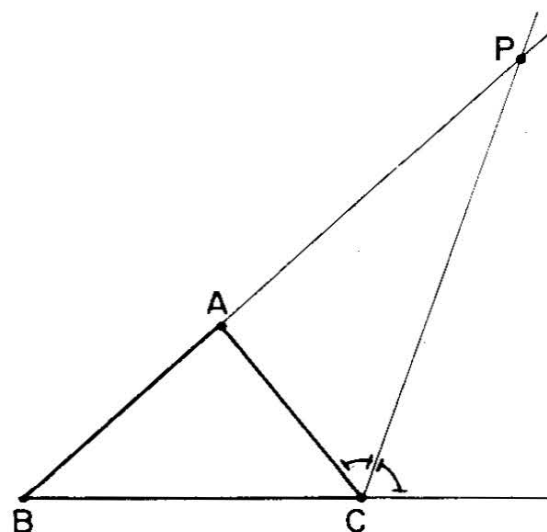
A) 1/3
B) 3/4
C) 4/3
D) 3/1
E) 7/1

Solução

Pelo teorema das bissetrizes,

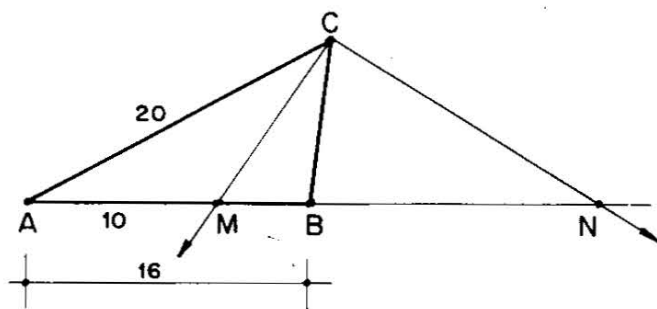
$$\frac{PB}{PA} = \frac{CB}{CA} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{PB - PA}{PA} = \frac{4 - 3}{3}$$

$$\frac{AB}{PA} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{PA}{AB} = 3$$

Resposta: D.

25. Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa de $\widehat{B}$ encontram o lado oposto em M e N. Se AC = 20, AB = 16 e AN = 10, calcule CB e BN.

Solução

Como os pontos A, M, B e N formam uma divisão harmônica, poderemos aplicar, por exemplo, a relação encontrada em 1 · 8 — 1.° caso.

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \Longrightarrow \frac{2}{16} = \frac{1}{10} = \frac{\cdot 1}{AN}$$

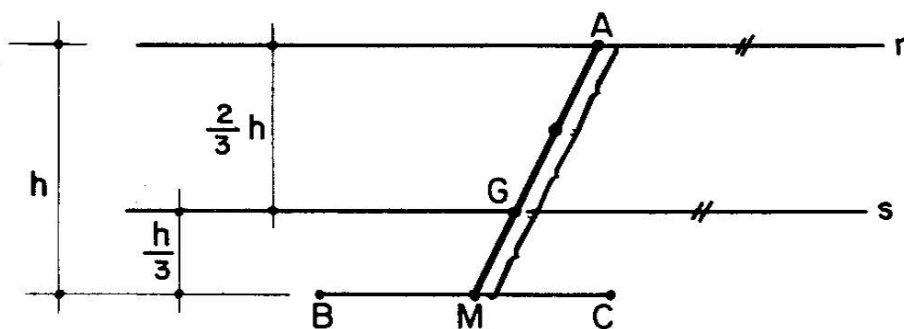
$$\frac{1}{AN} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \Longrightarrow AN = 40 \Longrightarrow BN =$$

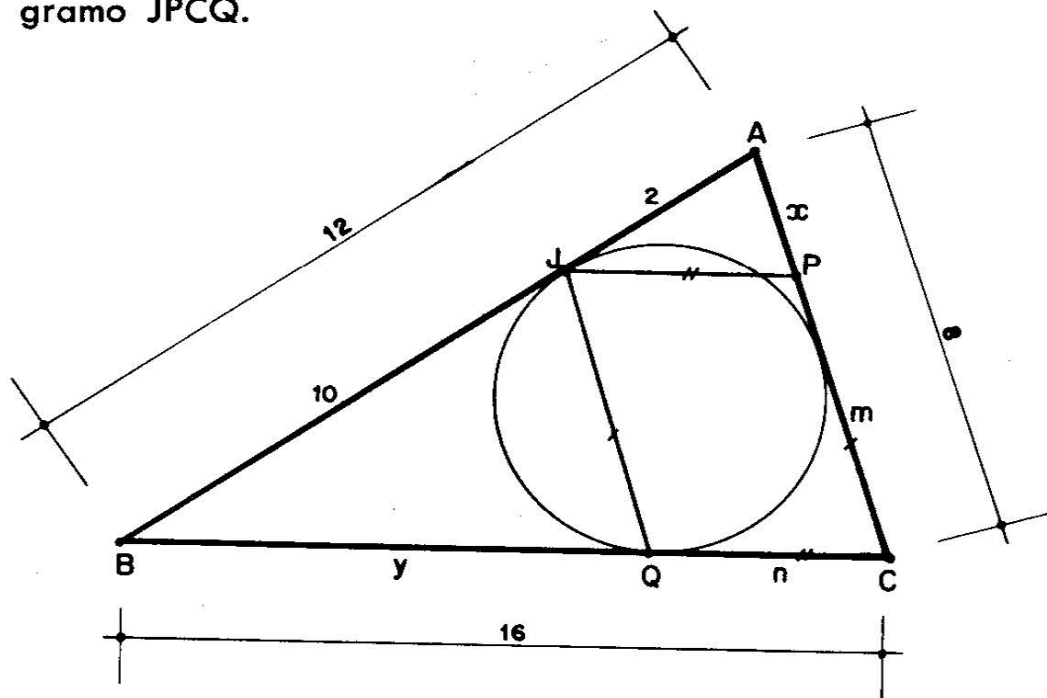
40 — 16 = 24. Como MB = 6, temos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} \Longrightarrow \frac{10}{6} = \frac{20}{CB} \Longrightarrow CB = 12$$

Respostas: CB = 12, BN = 2

26. Em um triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ é fixa e o ponto A percorre uma reta *r* paralela a BC. Determine o lugar geométrico do baricentro do triângulo.

Solução

Porque $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$, o lugar geométrico do ponto G é uma reta s paralela a r (s entre r e BC), distando $\frac{h}{8}$ de BC.

27. Em um triângulo ABC, AB = 12, AC = 8 e BC = 16. O círculo inscrito é tangente ao lado $\overline{AB}$ em J. Se $\overline{JP}$ e $\overline{JQ}$ são paralelas a $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, calcule o perímetro do paralelogramo JPCQ.

Solução

O semiperímetro do triângulo ABC é $p = \dfrac{12 + 8 n 16}{2} = 18.$

$AJ = p - a = 18 - 16 = 2$. Seja $AP = x$. Como $\overline{JP} // \overline{BC}$,

$$\frac{2}{x} = \frac{12}{8} \Longrightarrow x = \frac{4}{3} \Longrightarrow m = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \cdot$$

$BJ = p - b = 18 - 8 = 10$. Seja $BQ = y$. Como $\overline{JQ} // \overline{AC}$,

$$\frac{10}{y} = \frac{12}{16} \Longrightarrow y = \frac{40}{3} \Longrightarrow n = 16 - \frac{40}{3} = \frac{8}{3}$$

O perímetro do paralelogramo JPCQ será

$$(2p)_{JPCQ} = 2\,(m + n) = 2\left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{56}{3}$$

Resposta: $\dfrac{56}{3}$

28. Calcule o raio do círculo de Apolonius construído sobre o segmento $\overline{AB}$ de 21 cm na razão $\dfrac{5}{2} \cdot$

Solução

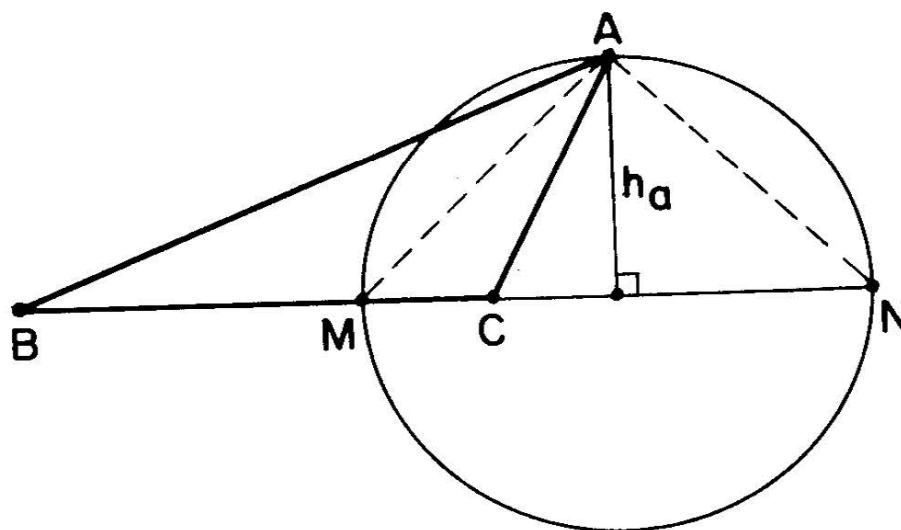
$$l = 21$$

$$k = \frac{5}{2} \cdot$$

Por 2.10, $\quad r = \dfrac{kl}{|k^2 - 1|} = \dfrac{\dfrac{5}{2} \cdot 21}{\dfrac{25}{4} - 1} = 10$

Resposta: $r = 10$ cm

29. Em um triângulo ABC, BC = 12 e $\frac{AB}{AC} = 2$, calcule o valor da altura relativa ao lado a, sabendo que ela é máxima.

Solução

Se $\frac{AB}{AC} = 2$, o vértice A pertence ao círculo de Apolonius construído sobre BC na razão 2. Se h_a é máxima, seu valor é igual ao raio do círculo de Apolonius.

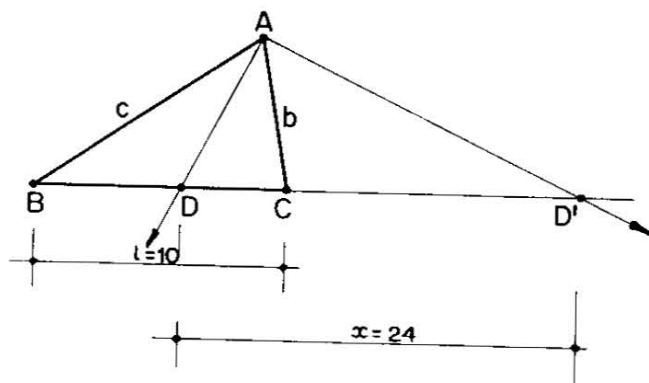
$$l = 12$$

$$k = 2$$

$$h_a = r = \frac{kl}{|k^2 - 1|} = \frac{2 \cdot 12}{2^2 - 1} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$$

Resposta: $h_a = 8$

29-A. Em um triângulo ABC, de perímetro 30, o lado BC mede 10 e a distância entre os pés das bissetrizes que partem de A é igual a 24. Calcule os lados AB e AC do triângulo.

1.ª Solução

Calcularemos a razão da divisão harmônica $k = \frac{c}{b}$.

Por 1.10,

$$x = \frac{2kl}{k^2 - 1} \Longrightarrow 24 = \frac{2 \cdot k \cdot 10}{k^2 - 1} \Longrightarrow$$

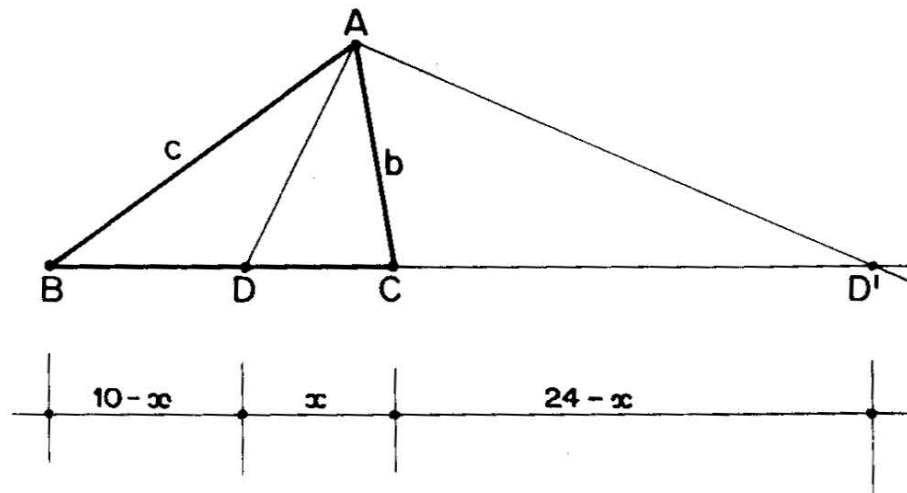
$$\Longrightarrow 6k^2 - 5k - 6 = 0 \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{2} & \text{(não serve)} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a + b + c = 30, \quad a = l = 10 \Longrightarrow b + c = 20$$

$$\frac{c}{b} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{b + c}{b} = \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{20}{b} = \frac{5}{2} \Longrightarrow b = 8$$

$$\frac{c}{8} = \frac{3}{2} \Longrightarrow c = 12$$

2.ª Solução

Chegaremos a idêntico resultado a partir da definição de divisão harmônica sem necessidade de aplicação de fórmulas.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} \Longrightarrow \frac{10 - x}{x} = \frac{34 - x}{24 - x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (10 - x)(24 - x) = x(34 - x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 240 - 10x - 24x + x^2 = 34x - x^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 - 34x + 120 = 0 \quad \begin{cases} x = 30 & \text{(não serve)} \\ x = 4 \end{cases}$$

Então, $DC = 4$ e $DB = 6$. Como $b + c = 20$, temos

$$\frac{c}{6} = \frac{b}{4} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{c}{6} = 2 \Longrightarrow c = 12$$

$$\frac{b}{4} = 2 \Longrightarrow b = 8$$

Resposta: $AB = 12$, $AC = 6$

PROBLEMAS PROPOSTOS

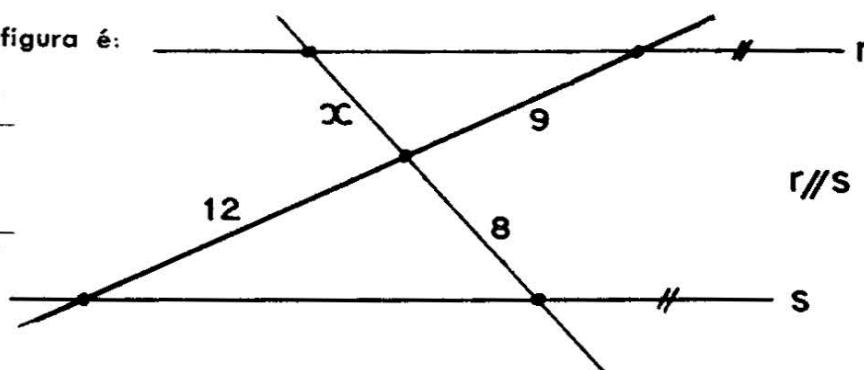
30. O valor de x na figura é:

A) $\frac{27}{2}$

B) $\frac{2}{27}$

C) 6

D) 4

E) NRA.

31. Em um triângulo ABC, de lados AB = 9, AC = 12 e BC = 15, traça-se $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$ passando pelo baricentro do triângulo (D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$). O perímetro do triângulo ADE é:

A) 12 C) 20

B) 18 D) 24

E) NRA.

32. Em um triângulo ABC de lados AB = 12, AC = 8 e BC = 10, o maior segmento que a bissetriz interna de $\widehat{A}$ determina sobre BC é:

A) 4 C) 6

B) 5,5 D) 7,5

E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 33 E 34.

Em um triângulo ABC de lados AB = 15, AC = 6 e BC = 14, seja I o ponto de concurso das bissetrizes internas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$.

33. A razão $\frac{IA}{ID}$ vale:

A) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{7}{3}$

E) NRA.

34. A razão $\frac{IE}{IB}$ vale:

A) $\frac{6}{29}$

B) $\frac{29}{6}$

C) $\frac{1}{6}$

D) 6

E) NRA.

35. Em um triângulo ABC de lados AB = 12, AC = 8 e BC = 10, a bissetriz interna de $\widehat{B}$ encontra a bissetriz $\overline{AN}$ externa de $\widehat{A}$ no ponto F. A razão $\frac{FN}{FA}$ vale:

A) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{4}{3}$

C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{5}{3}$

E) NRA.

36. Em um triângulo ABC, BC = a e $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$, calcule o comprimento da altura relativa ao lado **a** sabendo que ela é máxima.

A) $h_a = a$

B) $h_a = \frac{3}{2} a$

C) $h_a = \frac{5}{4} a$

D) $h_a = \frac{5}{3} a$

E) $h_a = \frac{6}{5} a$

37. Em um triângulo ABC, BC = 16 e $h_a = 8$, calcule a razão $\frac{AB}{AC}$ sabendo que ela é máxima.

A) 2

B) 3

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{4}{3}$

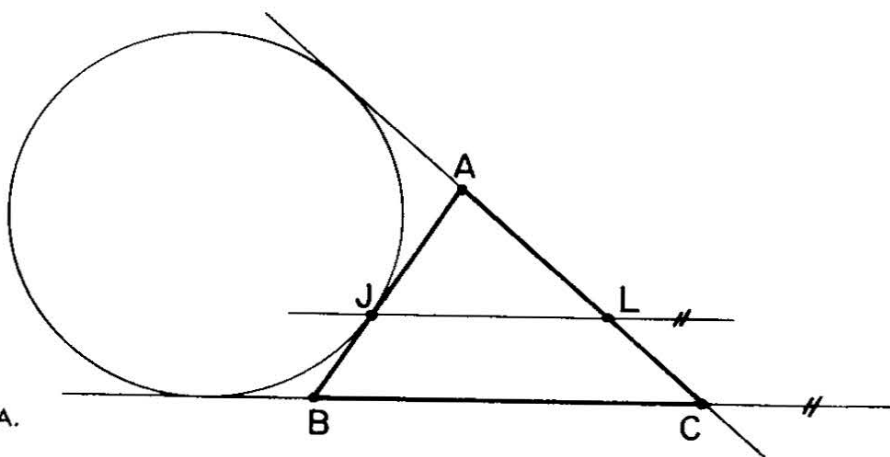
E) NRA.

38. Os lados do triângulo ABC medem AB = 6, AC = 9 e BC = 11. Se J é o ponto de tangência do círculo exinscrito relativo ao lado c com o lado $\overline{AB}$ e se $\overline{JL}$ é paralelo a BC, então AL vale:

A) 3

B) 6

D) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

E) NRA.

39. Considere em um círculo de centro O um diâmetro AB. Prolongue uma corda AP qualquer do círculo de um comprimento PQ = AP. $\overline{QO}$ e $\overline{BP}$ cortam-se em J. Calcule a razão $\frac{JQ}{JO}$.

A) 3

B) $\frac{3}{2}$

C) 2

D) $\frac{5}{3}$

E) NRA.

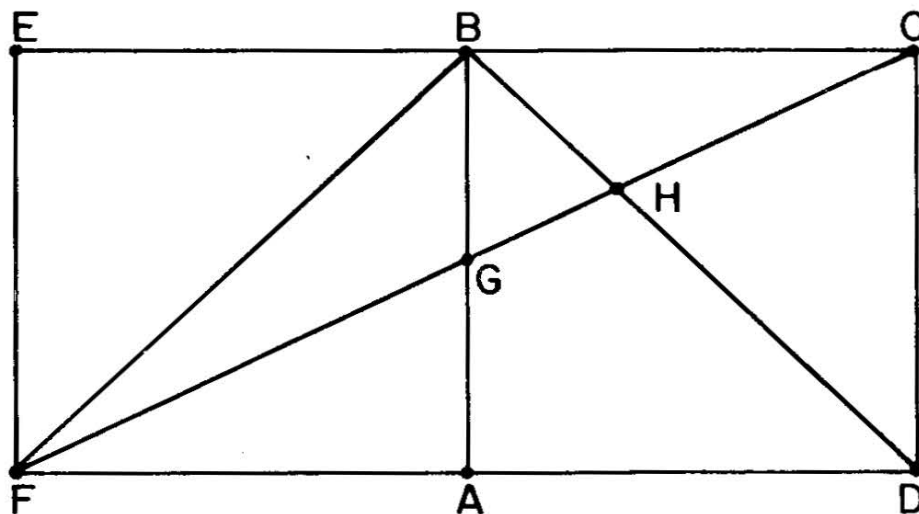
40. Considere os quadrados ABCD e ABEF da figura. Se FG = 12 e GH = 4, calcule HC.

A) 9

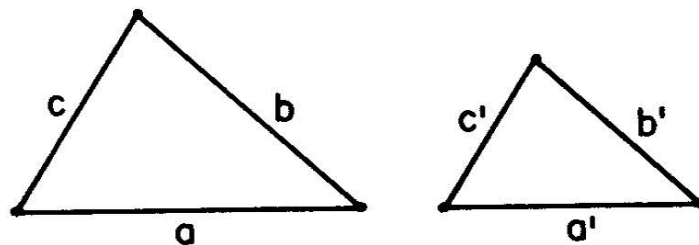
B) 8

C) 6

D) 5

E) NRA

CAPÍTULO 3

3.1 — TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Se dois triângulos possuem lados respectivamente proporcionais, então são "semelhantes".

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

3.2 — TEOREMA

Dois triângulos que possuem seus ângulos respectivamente congruentes são semelhantes.

De fato, em 2.5 os triângulos ADE e ABC possuem mesmos ângulos internos e mostramos que seus lados são respectivamente proporcionais.

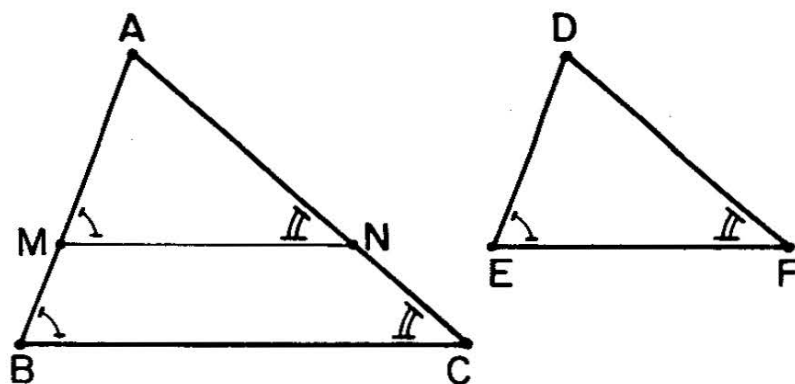
3.3 — RECÍPROCA

Se dois triângulos são semelhantes, seus ângulos internos são respectivamente congruentes.

H — $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

T — $\widehat{A} = \widehat{O}$

$\widehat{B} = \widehat{E}$

$\widehat{C} = \widehat{F}$.

D — Seja ΔAMN por construção, tal que

$$AM = DE \text{ e } \overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC}.$$

De 2.5, temos

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Como $AM = DE$,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}. \qquad (1)$$

Mas, por hipótese,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}. \qquad (2)$$

Por (1) e (2), ΔAMN e ΔDEF são congruentes e

$$\widehat{A} = \widehat{D}, \quad \widehat{M} = \widehat{B} = \widehat{E}, \quad \widehat{N} = \widehat{C} = \widehat{F}$$

C. Q. D.

3.4 — CONCLUSÃO

Se ABC e A'B'C' são dois triângulos,

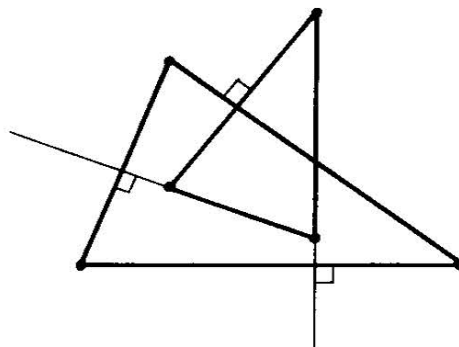
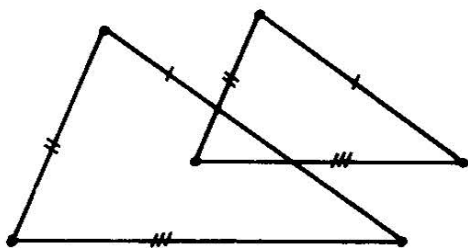
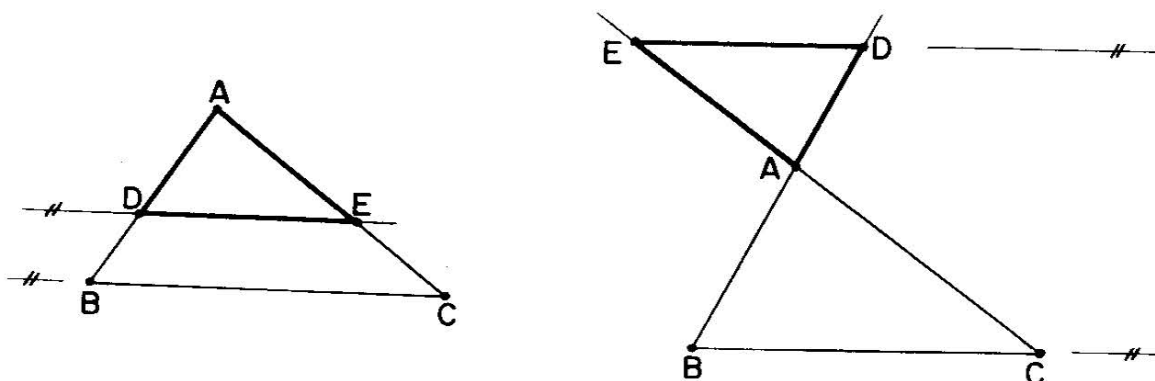
$$\begin{bmatrix} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{bmatrix} \iff \left[\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \right]$$

k é chamado razão de semelhança dos dois triângulos.

Da relação acima conclui-se que a razão entre os perímetros de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança, ou seja,

$$\frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = k \implies \boxed{\frac{(2p)_{ABC}}{(2p)_{A'B'C'}} = k.}$$

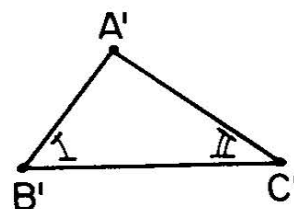
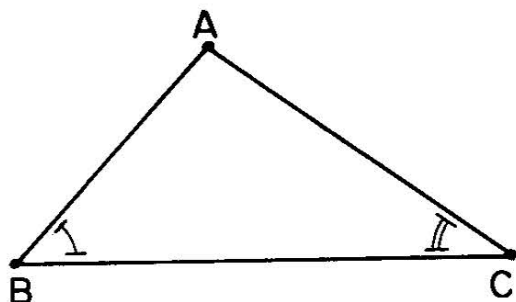
3.5 — OBSERVAÇÕES

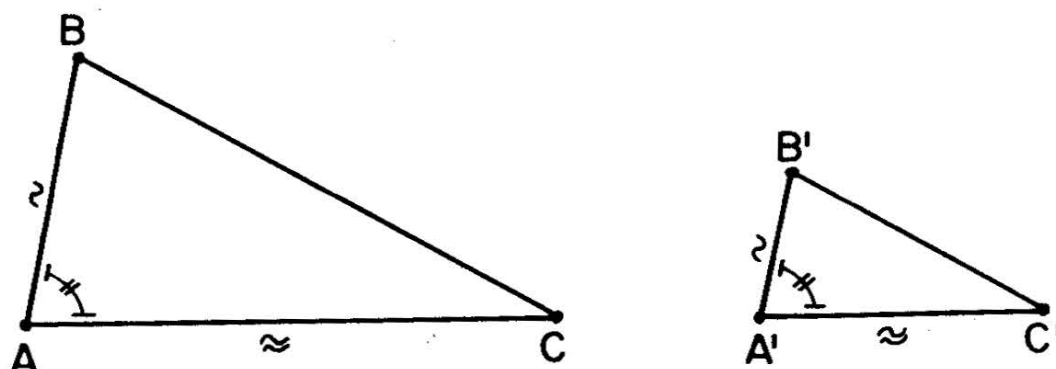
a) Dois triângulos de lados respectivamente paralelos ou perpendiculares são semelhantes.

b) Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro semelhante ao primeiro

$\overline{DE} \,//\, \overline{BC} \implies \Delta ADE \sim \Delta ABC.$

3.6 — CASOS CLÁSSICOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1.° *caso*

Se dois ângulos de um triângulo A′B′C′ são respectivamente congruentes a dois ângulos de um triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes.

$$\begin{bmatrix} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{bmatrix} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \implies \begin{bmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \end{bmatrix}$$

2.° *caso*

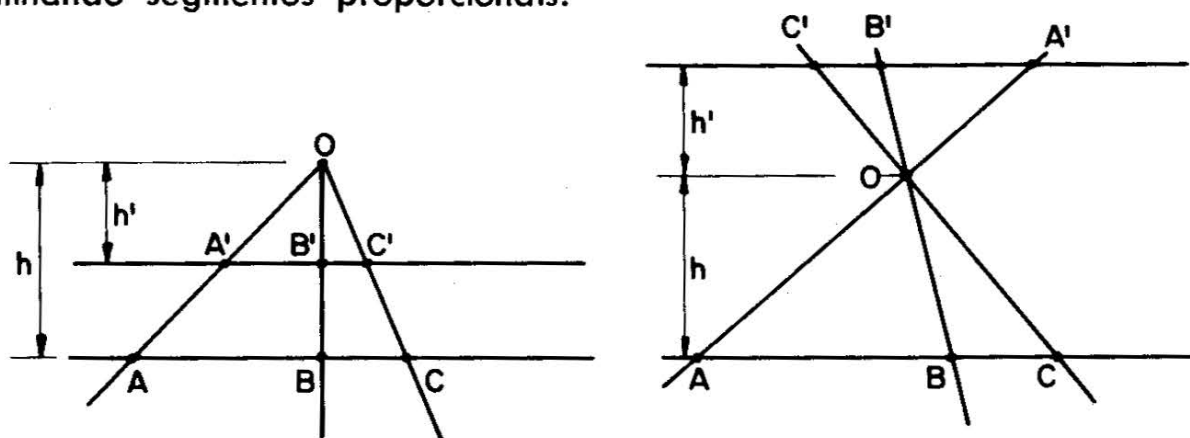
Se dois lados de um triângulo A′B′C′ são respectivamente proporcionais a dois lados de um triângulo ABC e se forem congruentes os ângulos formados por esses lados, os triângulos são semelhantes.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \\ \widehat{A} = \widehat{A}' \end{array}\right] \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \dfrac{a}{a'} = k \end{array}\right]$$

3.° *caso*

Se os três lados de um triângulo A'B'C' são respectivamente proporcionais aos três lados de um triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes.

$$\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k\right] \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{array}\right]$$

3.7 — FEIXE DE RETAS CONCORRENTES

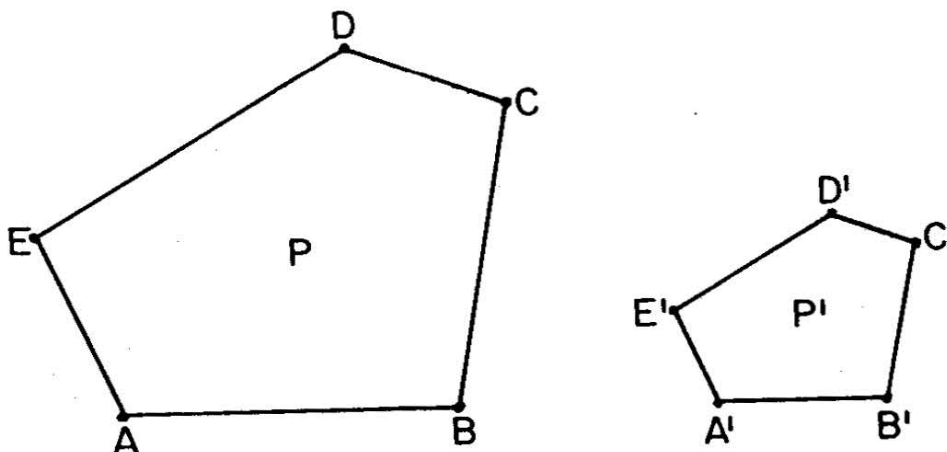
Um par de paralelas intercepta um feixe de concorrentes, determinando segmentos proporcionais.

Da semelhança dos triângulos OA'B' e OAB, OB'C' e OBC temos, por 8.5, a) e b)

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \text{........} = \frac{h'}{h}$$

Verificamos também que da semelhança desses mesmos triângulos os segmentos homólogos determinados nas paralelas são proporcionais, ou seja,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \text{........} = \frac{h'}{h}$$

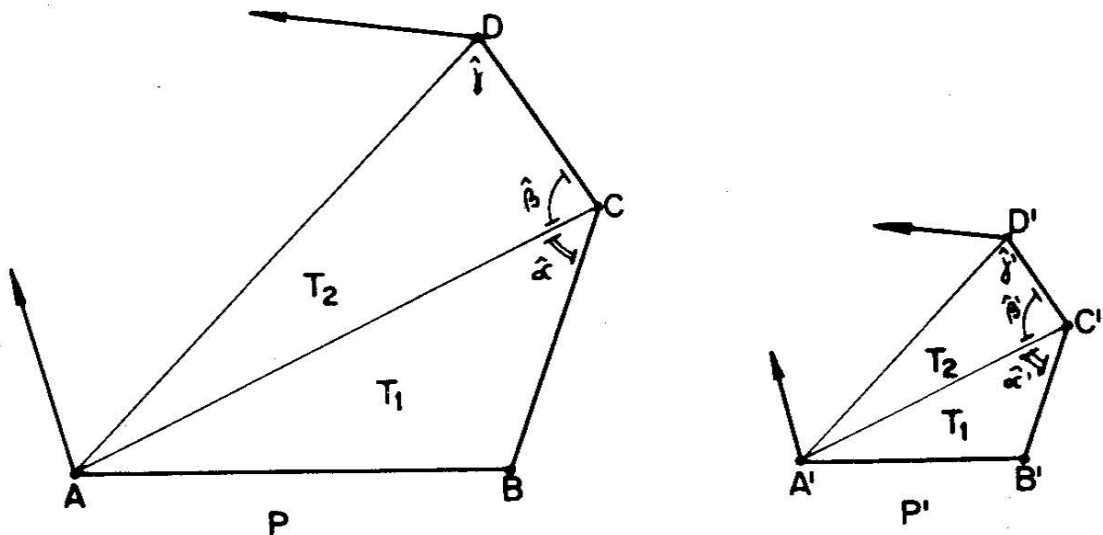
3.8 — POLÍGONOS SEMELHANTES

3.8.1 — Dois polígonos são semelhantes se os ângulos internos forem ordenadamente congruentes e se os lados que formam ângulos congruentes forem proporcionais.

$$P \sim P' \Longrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \vdots \\ \text{e} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dots\dots = k \end{cases}$$

3.8.2 — A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Da proporcionalidade dos lados homólogos conclui-se imediatamente

$$\boxed{\frac{(2p)_P}{(2p)_{P'}} = k}$$

3.8.3 — Dois polígonos semelhantes podem ser divididos em igual número de triângulos ordenadamente semelhantes.

Nos dois polígonos tracemos todas as diagonais possíveis por A e A', dividindo cada polígono em n — 2 triângulos (n = gênero).

H — $P \sim P'$ (com as implicações de 3.8)

T — $T_1 \sim T_1'$

$T_2 \sim T_2'$

etc.

D — $\left[\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k \end{array}\right] \Longrightarrow T_1 \sim T_1' \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}' \\ \\ \dfrac{AC}{A'C'} = k \end{array}\right]$

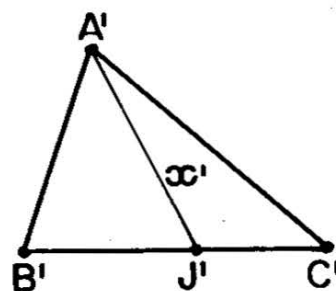
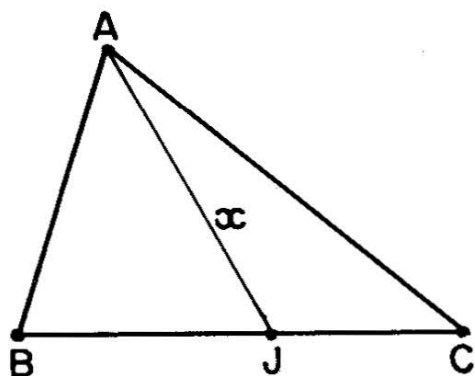
(2.° caso)

mas, se $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$, então $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}'$ e, então, temos

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{\beta} = \widehat{\beta}' \\ \\ \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = k \end{array}\right] \Longrightarrow T_2 \sim T_2' \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}' \\ \\ \dfrac{AD}{AD'} = k \end{array}\right]$$

(2.° caso)

e assim sucessivamente, ficando provado o Teorema.

3.8.4 — Em quaisquer polígonos semelhantes a razão de duas linhas homólogas é igual à razão de semelhança.

Sejam dois triângulos ABC e A'B'C' semelhantes na razão k. Sejam J e J' pontos que dividem $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ na mesma razão m. Vamos provar que x e x' guardam mesma razão k.

H — $\dfrac{\Delta\ ABC}{\Delta\ A'B'C'} = k$

$$\frac{JB}{JC} = m$$

$$\frac{J'B'}{J'C'} = m$$

T — $\dfrac{x}{x'} = k.$

D — $\dfrac{JB}{JC} = m$ $\qquad \dfrac{J'B'}{J'C'} = \dfrac{m+1}{m}$

$$\frac{JB + JC}{JB} = \frac{m+1}{m} \qquad \frac{J'B' + J'C'}{J'B'} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{BC}{JB} = \frac{m+1}{m} \qquad \frac{B'C'}{J'B'} = \frac{m+1}{m}$$

dividindo membro a membro,

$$\frac{\dfrac{BC}{JB}}{\dfrac{B'C'}{J'B'}} = 1$$

$$\frac{BC}{JB} = \frac{B'C'}{J'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{JB}{J'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

Assim, os triângulos ABJ e A'B'J' são semelhantes na razão k e, então,

$$\boxed{\frac{x}{x'} = k.}$$

Assim, a razão de semelhança de dois triângulos é igual

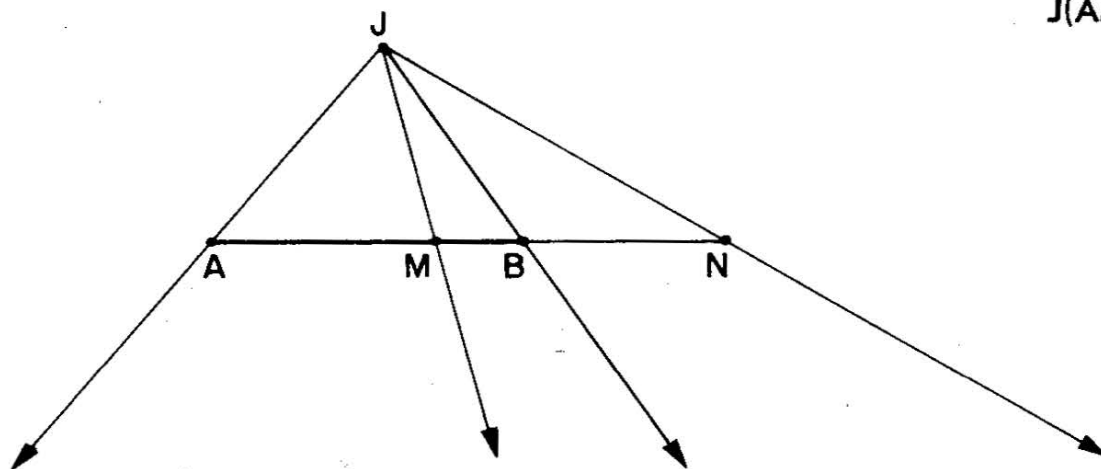
— à razão entre dois lados homólogos,

— à razão entre os perímetros,

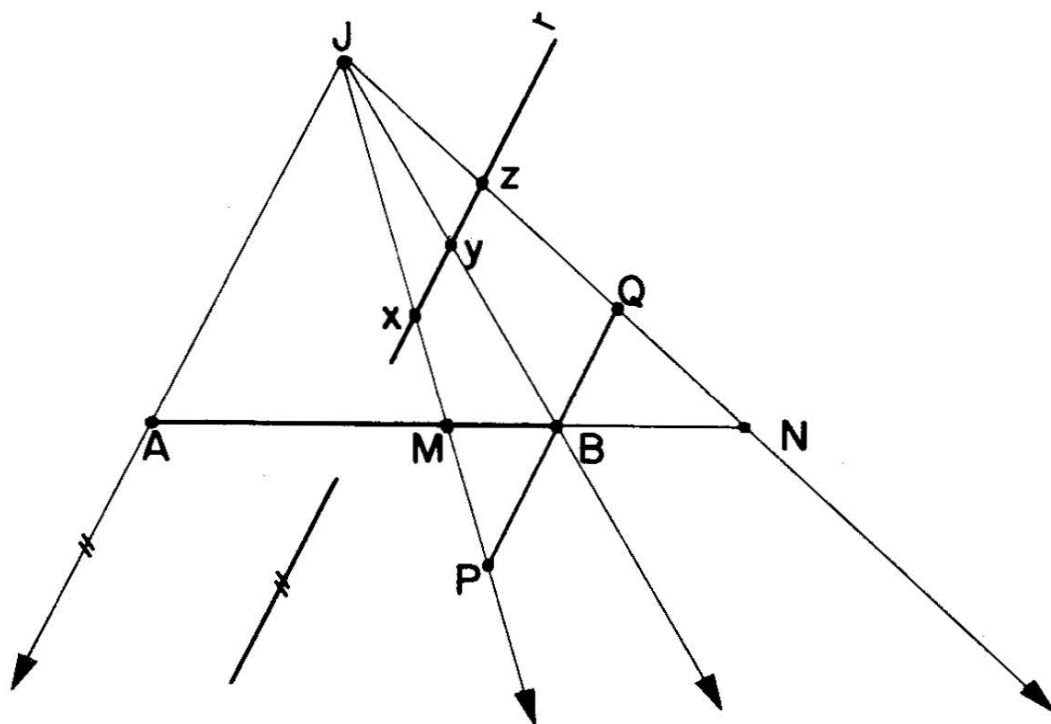
— à razão entre duas medianas homólogas,

— à razão entre duas alturas homólogas etc.

3.9 — FEIXE HARMÔNICO

3.9.1 — Se os pontos A, M, B e N formam uma divisão harmônica e se J é um ponto não pertencente à reta que os contém, JA, JM, JB e JN formam um feixe harmônico.

Notação:
J(AMBN)

3.9.2 — **Teorema**

Se uma reta é paralela a um dos raios de um feixe harmônico, os outros três raios determinam segmentos congruentes e reciprocamente.

Consideremos um feixe harmônico J(AMBN) e uma reta r paralela a JA determinando os segmentos $\overline{xy}$ e $\overline{yz}$, que mostraremos serem congruentes.

Seja $\overline{PBQ}$ paralela a *r*.

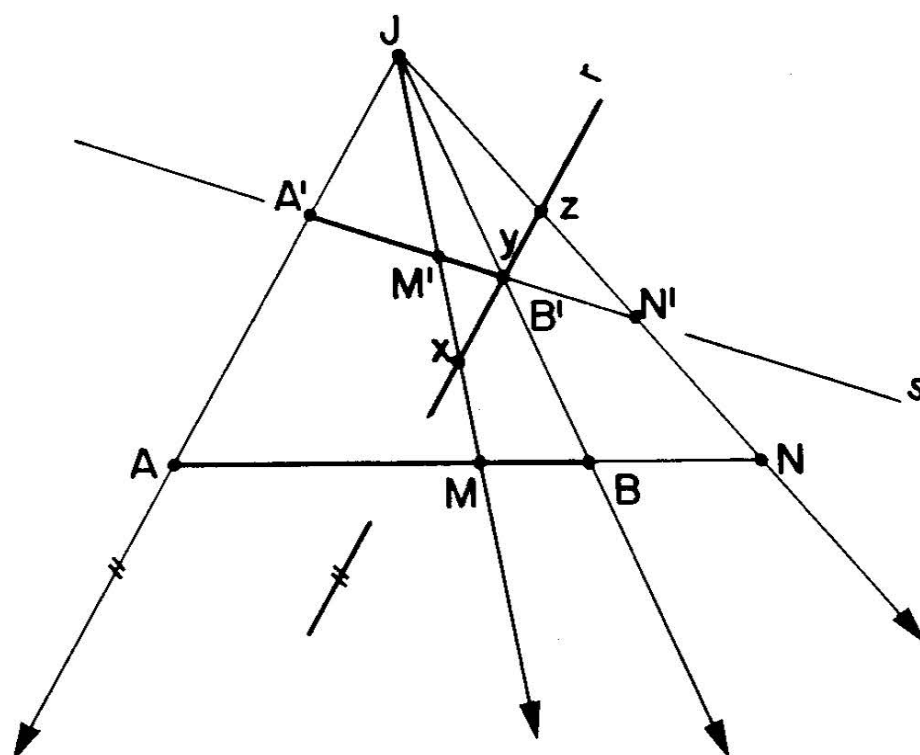
$$\Delta\, JMA \sim \Delta\, PMB \implies \frac{JA}{PB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

$$\Delta\, NJA \sim \Delta\, NBQ \implies \frac{JA}{BQ} = \frac{NA}{NB} = k.$$

Daí conclui-se que PB = BQ e que

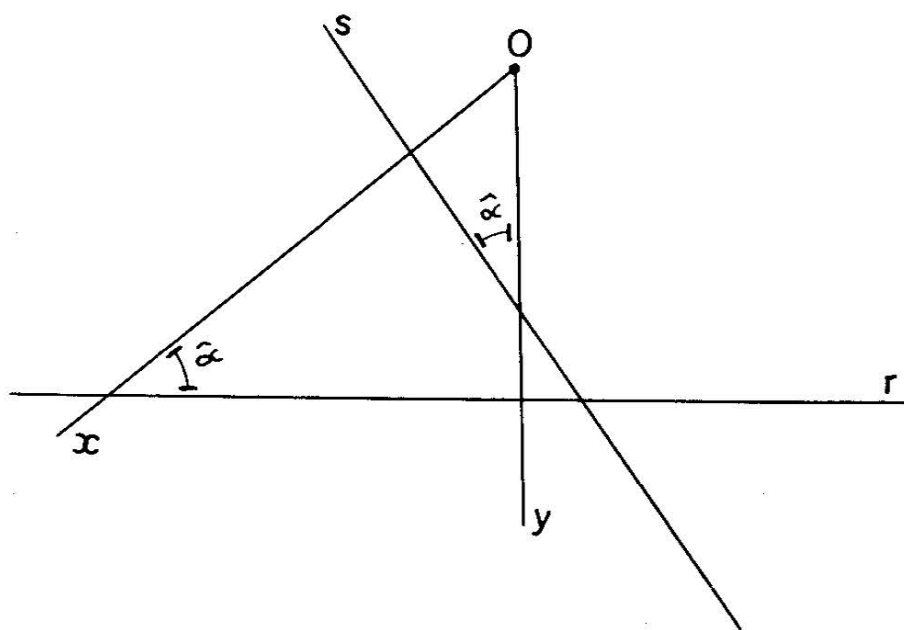
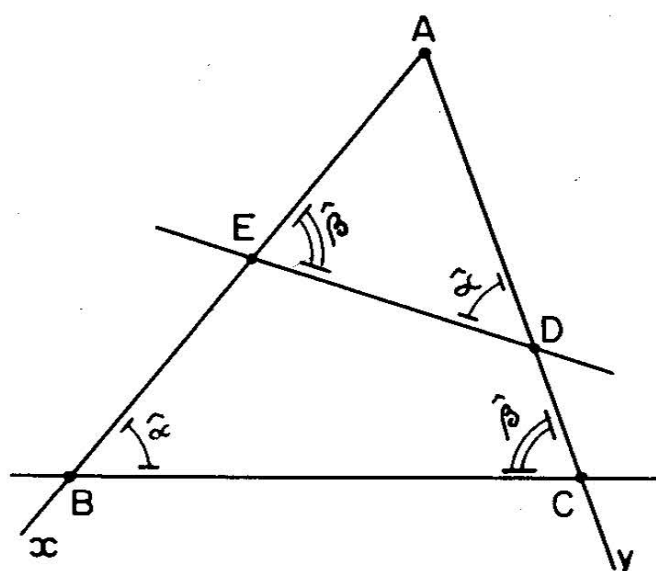
$$\boxed{\overline{xy} = \overline{yz}.}$$

3.9.3 — Teorema

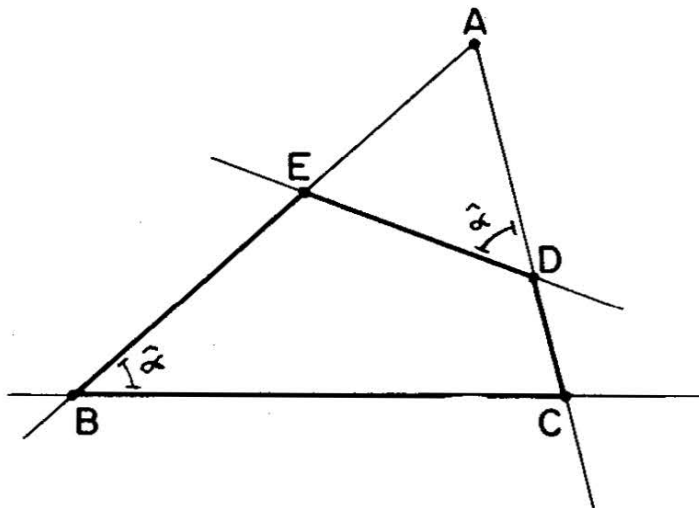
Um feixe harmônico determina em qualquer secante quatro pontos em divisão harmônica.

Seja J(AMBN) um feixe harmônico e uma secante s que determina os pontos A', M', B' e N'.

Ora, se r // JA' determina $\overline{xy} = \overline{yz}$ (pois J-AMBN é feixe harmônico), então J(A'M'B'N') é um feixe harmônico, sendo M' e N' conjugados harmônicos de $\overline{A'B'}$.

3.10 — RETAS ANTIPARALELAS

3.10.1 — Seja um ângulo $x\widehat{O}y$. Se duas retas r e s são tais que o ângulo que r forma com Ox é o mesmo ângulo que s forma com Oy, as retas r e s são antiparalelas.

3.10.2 — Retas antiparalelas formam triângulos semelhantes.

Porque os triângulos ABC e ADE possuem ângulos internos congruentes, temos

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}} \quad \text{(I)} \qquad \text{e} \qquad \boxed{AD \cdot AC = AE \cdot AB} \quad \text{(II)}$$

3.10.3 — Retas antiparalelas formam quadrilátero inscritível.

$\widehat{B} = \widehat{\alpha}$

$\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{\alpha} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B + \widehat{D} = 180^\circ$

BCDE é inscritível.

3.10.4 — **Caso Particular**

Se as retas r e s da figura são antiparalelas em relação a $\widehat{O}$, a relação 3.10.2 — II transforma-se em

$$OA^2 = OB \cdot OB'$$

3.10.5 — Se r e s são antiparalelas em relação a $\widehat{O}$, as bissetrizes de $\widehat{O}$ e de $(\widehat{r, s})$ são perpendiculares.

De fato, $\widehat{M} = \widehat{\alpha} + \widehat{\theta}$ (externo Δ OMC)

$\widehat{N} = \widehat{\alpha} + \widehat{\theta}$ (externo Δ ONA)

Como $\widehat{M} = \widehat{N}$, o triângulo JMN é isósceles, sendo a bissetriz de $\widehat{J}$ perpendicular à base $\overline{MN}$. Assim,

$$\boxed{Ox \perp Jy} \qquad \text{C. Q. D.}$$

3.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

41. Os lados de um triângulo ABC são AB = 12, AC = 16 e BC = 24. Seja M do lado $\overline{AB}$ tal que MA = 3 MB. Traçando $\overline{MN}$ paralela a $\overline{BC}$, calcule o perímetro do triângulo AMN.

Solução

$MA + MB = 12, \quad MA = 3\ MB$

$4\ MB = 12, \quad MB = 3, \quad MA = 9.$

$\Delta\ AMN \sim \Delta\ ABC.$

Razão de semelhança $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{(2p)_{ABC}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{12 + 16 + 24} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2p)_{AMN}}{52} = \frac{3}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2p)_{AMN} = 39$$

Resposta: 39.

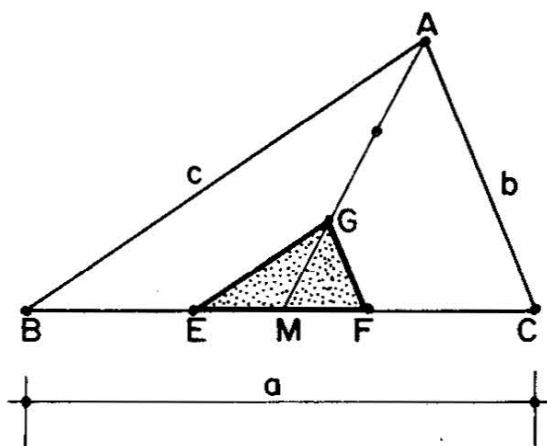
42. Considere o triângulo ABC, de lados a, b e c, e seu baricentro G. Traçam-se $\overline{GE}$ e $\overline{GF}$ paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule os lados do triângulo GEF.

Solução

Δ GEF $\sim$ Δ ABC

$$k = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

Então,

$$EF = \frac{a}{3}, \; GF = \frac{b}{3} \text{ e } GE = \frac{c}{3}$$

Resposta: $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ e $\frac{c}{3}$.

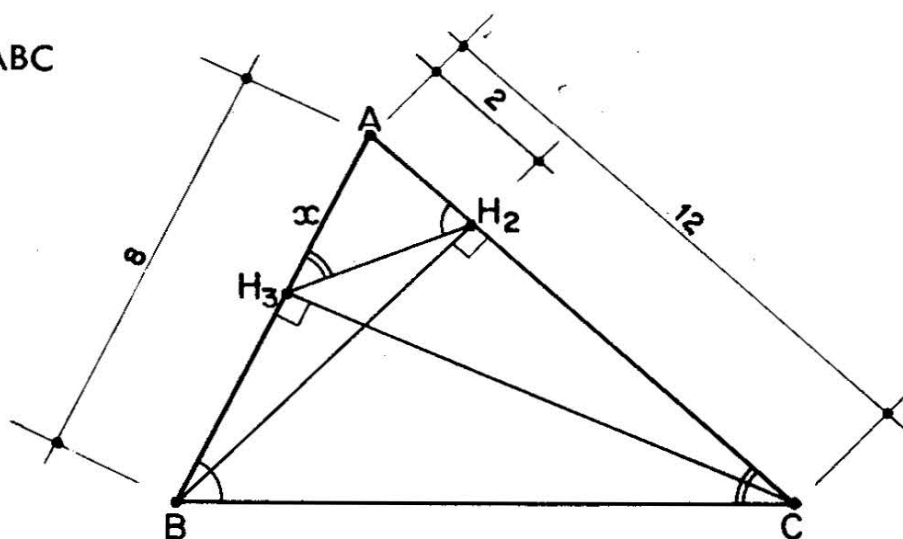
43. Em um triângulo ABC, considere as alturas $\overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$. Se AB = 8, AC = 12 e $AH_2 = 2$, calcule AH_3.

Solução

$\Delta AH_2H_3 \sim \Delta ABC$

$$\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{x}{12}$$

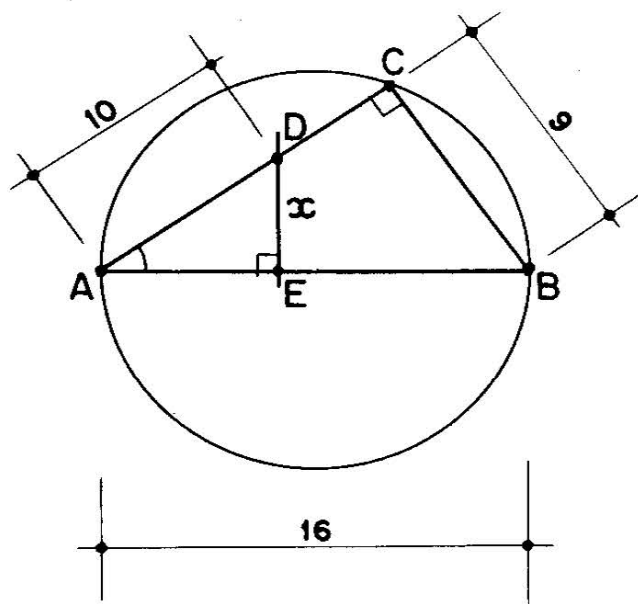
$x = 3$

Resposta: 3.

44. Calcule x na figura

Solução

Δ AED $\sim$ Δ ACB

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{10}{16} = \frac{x}{9} \implies x = 5{,}625$$

Resposta: $x = 5{,}625$.

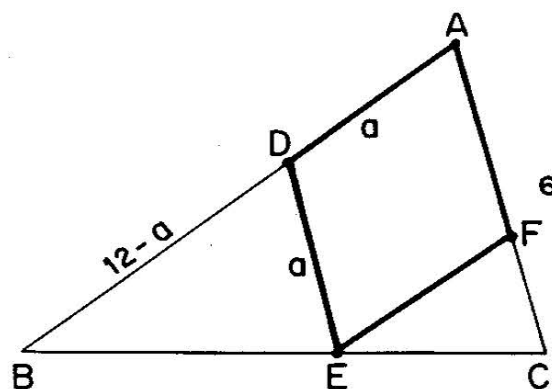
45. Na figura abaixo, ADEF é um losango, AB = 12 e AC = 6. Calcule o lado desse losango.

Solução

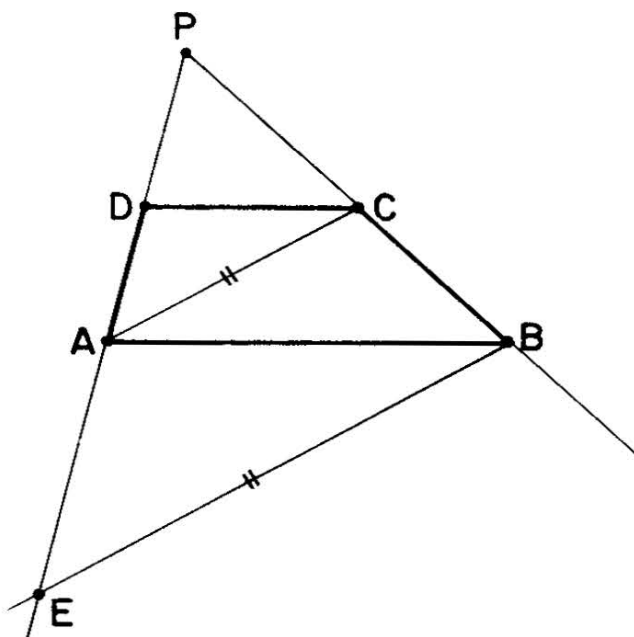
Δ BDE $\sim$ Δ BAC

$$\frac{a}{6} = \frac{12 - a}{12}$$

$$12a = 6(12 - a) \implies$$

$$\implies a = 4$$

Resposta: 4.

46. Em um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, traça-se por B uma paralela à diagonal $\overline{AC}$ que encontra o prolongamento de $\overline{AD}$ em E. Sendo P o ponto de concurso dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, prove que PA é média geométrica entre PD e PE.

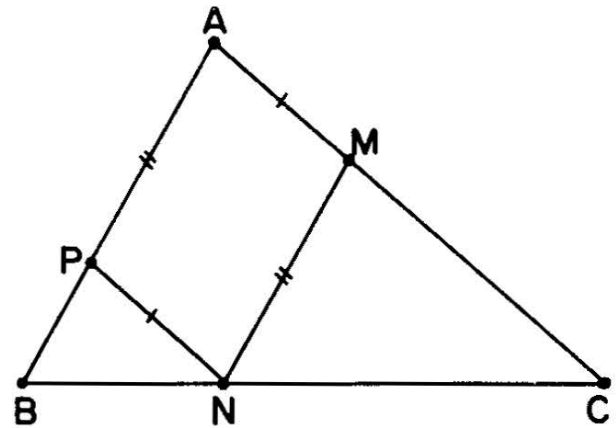
Solução

$$\left.\begin{array}{l} \Delta PDC \sim \Delta PAB \Longrightarrow \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{PC}{PB} \\ \\ \Delta PAC \sim \Delta PEB \Longrightarrow \dfrac{PA}{PE} = \dfrac{PC}{PB} \end{array}\right\} \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{PA}{PE} \Longrightarrow PA^2 = PD \cdot PE.$$

47. Em um triângulo ABC, toma-se um ponto M qualquer de $\overline{AC}$. Traçam-se $\overline{MN}$ paralela a $\overline{AB}$ e $\overline{NP}$ paralela a $\overline{AC}$. Prove que

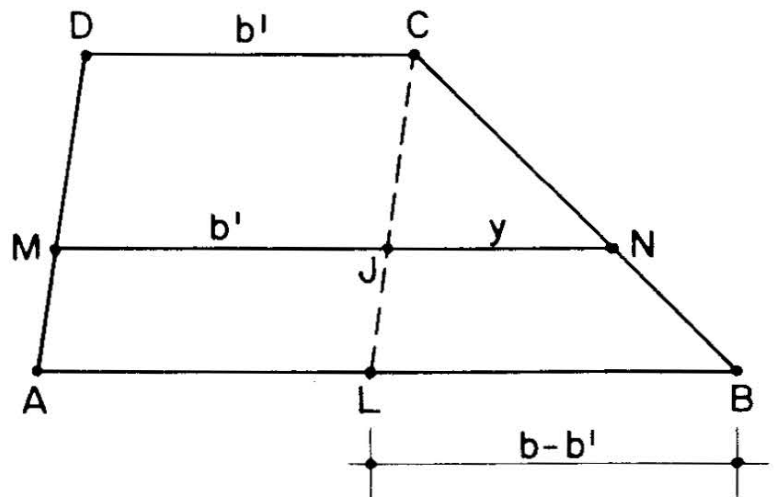
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC} = 1.$$

Solução

$\Delta\, CMN \sim \Delta\, CAB$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC} \Longrightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AC - AM}{AC}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AC} - \frac{AM}{AC} \Longrightarrow \frac{AP}{AB} + \frac{AM}{AC} = 1.$$

40. Em um trapézio de bases $AB = b$ e $CD = b'$, considere um ponto M do lado $\overline{AD}$ tal que $\dfrac{MA}{MD} = k$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{MN}$ paralelo às bases do trapézio.

Solução

$$\frac{MA}{MD} = \frac{k}{1} \Longrightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{x}{u+kx} = \frac{1}{k+1} = \frac{CJ}{CL}$$

Seja $MN = b' + y$

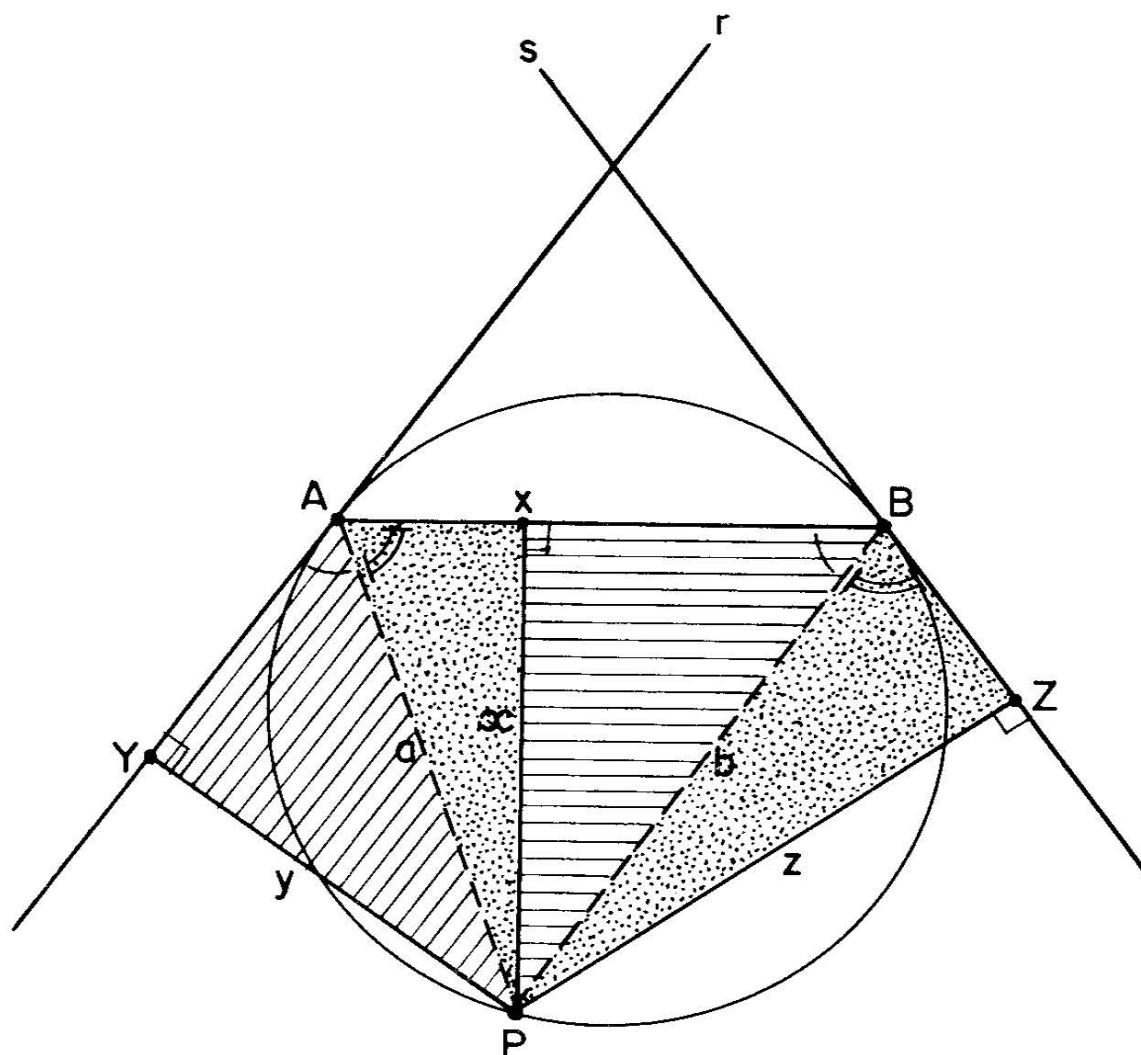
$\Delta\ CJN \sim \Delta\ CLB$

$$\frac{y}{b-b'} = \frac{CJ}{CL} = \frac{1}{k+1} \Longrightarrow y = \frac{b-b'}{k+1}.$$

$$MN = b' + \frac{b-b'}{k+J}$$

$$MN = \frac{b'k + b' + b - b'}{k+1} = \frac{b + b'k}{k+1}.$$

Resposta: $\dfrac{b + b'k}{k+1}$

49. Na figura, r e s são tangentes em A e B ao círculo. Por um ponto P do maior arco AB, traçam-se $\overline{Px}$, $\overline{Py}$ e $\overline{Pz}$ perpendiculares a $\overline{AB}$, r e s, respectivamente. Se Py = 4 e Pz = 9, calcule Px.

Solução

$$Y\hat{A}P = X\hat{B}P = \frac{\overset{\frown}{AP}}{2} \implies \Delta\, YAP \sim \Delta\, XBP \implies \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

$$X\hat{A}P = Z\hat{B}P = \frac{\overset{\frown}{BP}}{2} \implies \Delta\, XAP \sim \Delta\, ZBP \implies \frac{a}{b} = \frac{x}{z} \qquad (2)$$

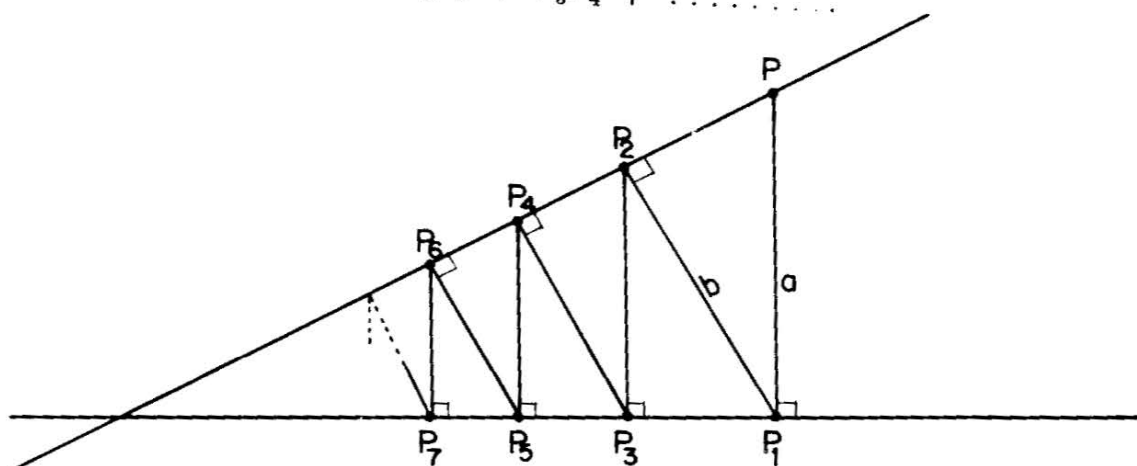
Por (1) e (2),

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{z} \implies x^2 = yz. \text{ Como } y = 4 \text{ e } z = 9,$$

$$x^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$x = 6$$

Resposta: 6

50. Na figura abaixo, $PP_1 = a$ e $P_1P_2 = b$. Calcule o limite da soma $PP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \ldots\ldots\ldots$

Solução

$$\Delta\, PP_1P_2 \sim \Delta\, P_1P_2P_3 \sim \Delta\, P_2P_3P_4 \sim \Delta\, P_3P_4P_5 \sim \ldots\ldots\ldots$$

Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{P_2P_3} = \frac{P_2P_3}{P_3P_4} = \ldots\ldots\ldots,$$

$$e \quad P_2P_3 = \frac{b^2}{a}, \quad P_3P_4 = \frac{b^3}{a^2}, \ldots, \quad P_nP_{n+1} = \frac{b^n}{a^{n-1}}.$$

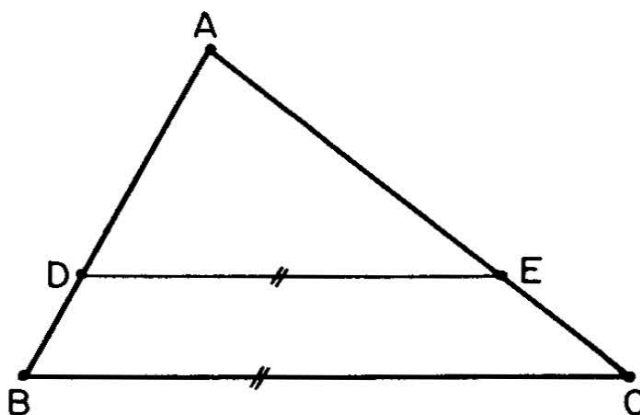
A soma dos segmentos será

$$a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots = a\underbrace{\left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots\right]}_{\text{P.G.}} =$$

$$= a \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a - b}$$

Resposta: $\dfrac{a^2}{a - b}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

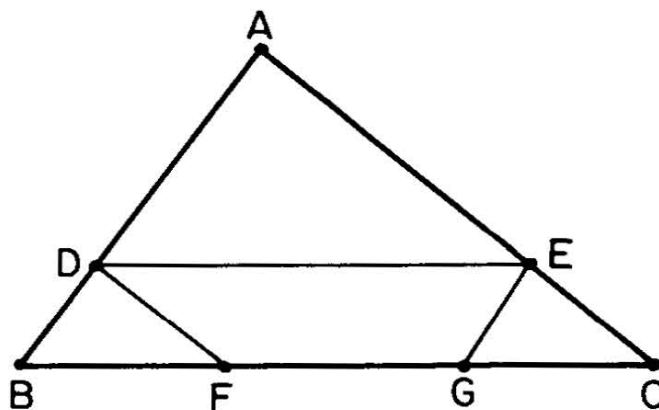
51. Na figura abaixo, AD = 20, DB = 5, AC = 30 e BC = 45. Se $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, calcule o perímetro do trapézio BCDE.

52. Na figura abaixo, BC = 32, $\frac{BD}{BA} = \frac{1}{4}$, $\overline{DE}//\overline{BC}$, $\overline{DF}//\overline{AC}$ e $\overline{EG}//\overline{AB}$. Então, FG mede:

A) 8

B) 16

C) 24

D) 30

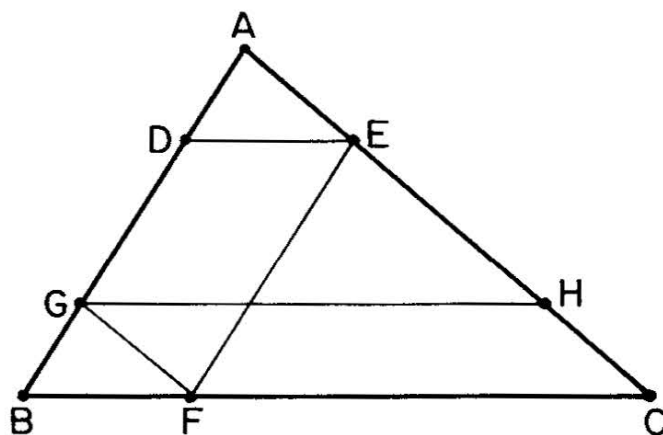
E) NRA.

53. Na figura abaixo, AD = $\frac{1}{4}$ AB, $\overline{DE}//\overline{BC}$, $\overline{EF}//\overline{AB}$, $\overline{FG}//\overline{AC}$ e $\overline{GH}//\overline{BC}$. Então, $\frac{EH}{AC}$ vale:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{3}{4}$

54. Na figura, cada lado do triângulo ABC está dividido em três segmentos congruentes. Considere a ceviana $\overline{AJ}$ que passa pelo ponto de concurso de $\overline{DE}$ e $\overline{FH}$.

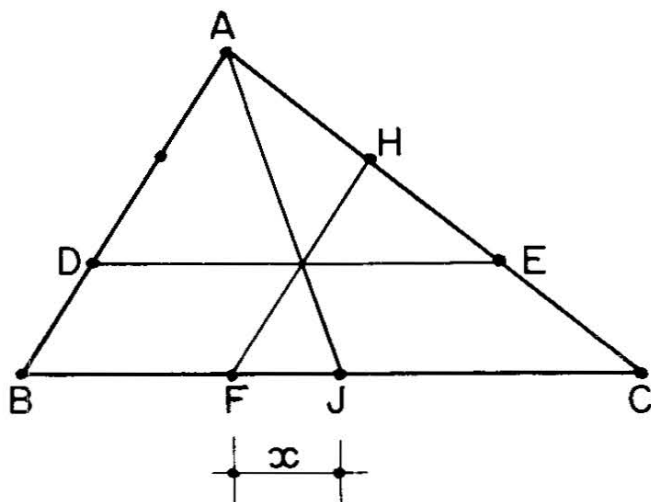
Se FJ = x, BC mede:

A) 3x

B) 4x

C) 6x

D) 9x

E) NRA.

55. Dado um triângulo de perímetro P, unindo-se os pontos médios de seus lados forma-se um triângulo, unindo-se os pontos médios desse segundo triângulo forma-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. A soma dos perímetros de todos os triângulos

A) é infinita

B) é igual a P

C) é igual a 2P

D) é superior a 2P mas finita

E) NRA.

56. Um trapézio tem bases de comprimentos 8 e 4 e altura 9. A que distância da base maior cortam-se as diagonais?

A) 4,5

B) 5

C) 6

D) 6,5

E) NRA.

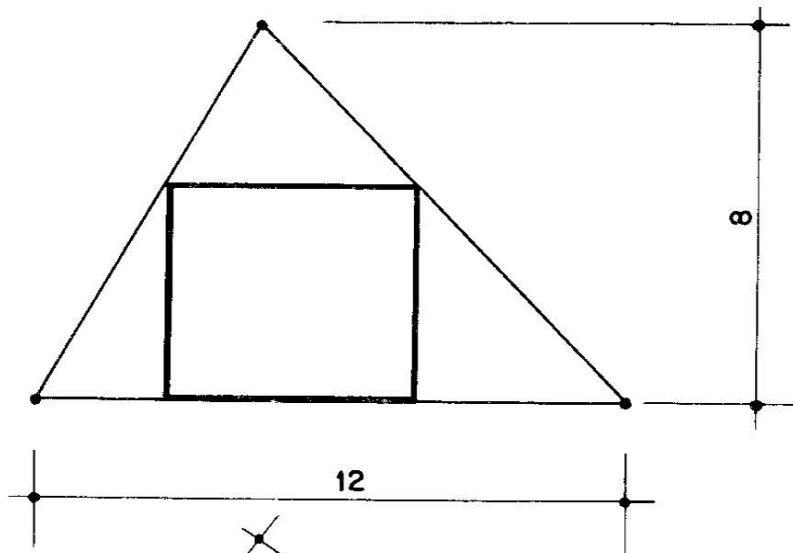
57. O comprimento do lado do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 8 é:

A) 4

B) 4,2

C) 4,5

D) 4,8

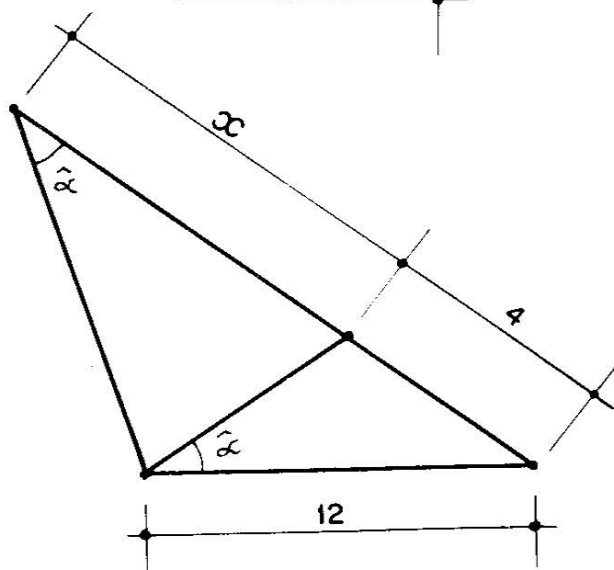
E) 5

58. Calcule na figura

A) 20

B) 24

C) 28

D) 30

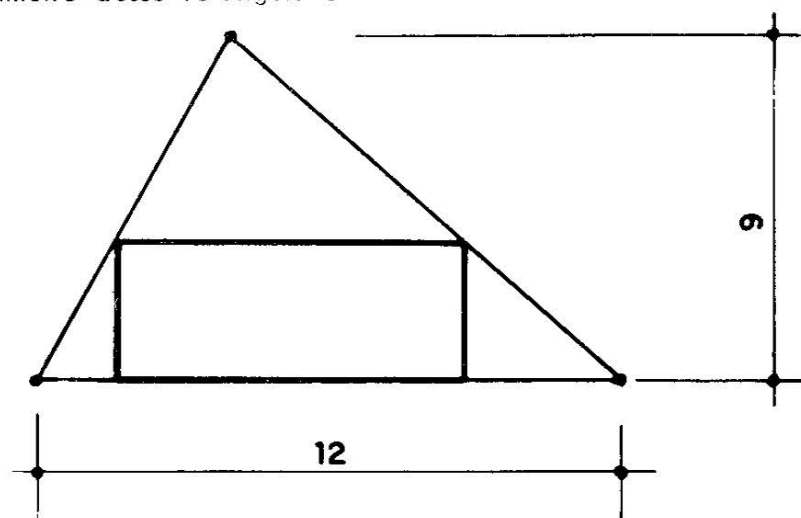
E) 32

59. Um retângulo cuja base é o dobro da altura está inscrito em um triângulo de base 12 e altura 9. O perímetro desse retângulo é:

A) 3,6

B) 14,4

C) 18,8

D) 21,6

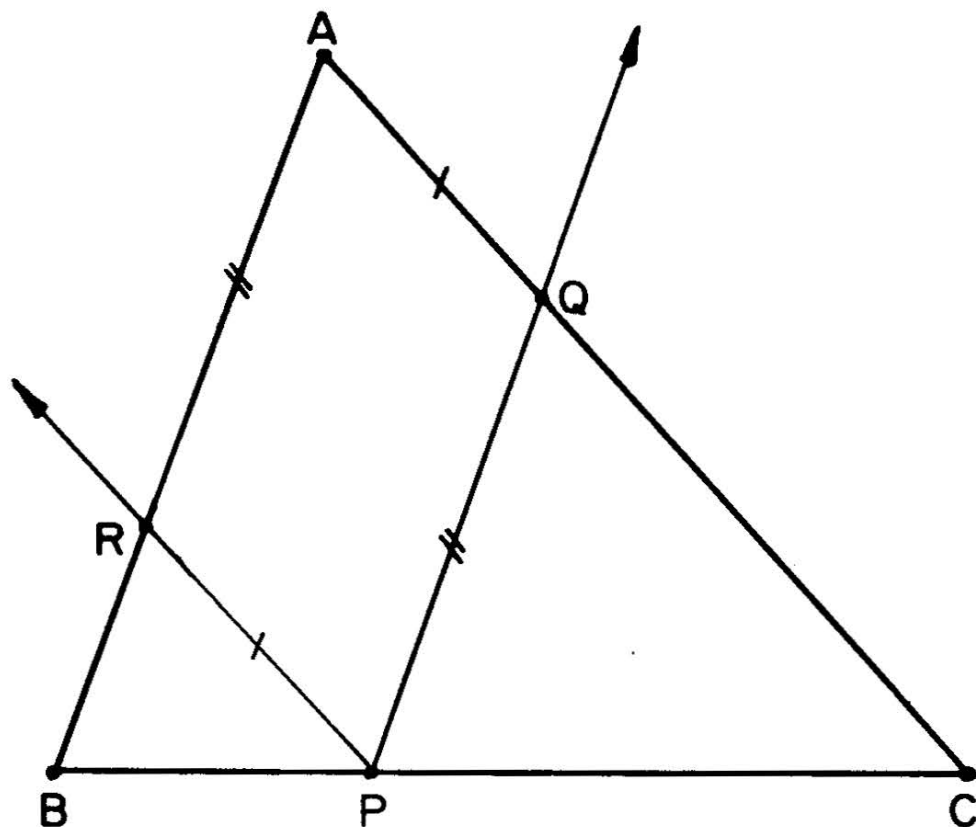
E) NRA.

60. Por um ponto P da base $\overline{BC}$ de um triângulo ABC traçamos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ paralelos a $\overline{AB}$ e AC, respectivamente. Se AB = 8, AC = 12, BC = 10 e BP = 2, o perímetro do paralelogramo AQPR é:

A) $\frac{88}{5}$

B) $\frac{76}{5}$

C) $\frac{64}{5}$

D) $\frac{44}{5}$

E) NRA.

61. Por um ponto P da base $\overline{BC}$ de um triângulo ABC traçamos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ paralelos a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Se AR = 4, RB = 1 e QC = 6, então AQ mede:

A) 1

B) $\frac{6}{5}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{8}{5}$

E) NRA.

62. Num retângulo ABCD de lados AB = 15 e BC = 9 traçam-se a diagonal $\overline{BD}$ e o segmento $\overline{CM}$ (M, médio de $\overline{AB}$) que se cortam em P. Por P traçam-se as perpendiculares $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$ aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. O perímetro do retângulo PRBS é:

A) 12

B) 15

C) 16

D) 18

E) 20

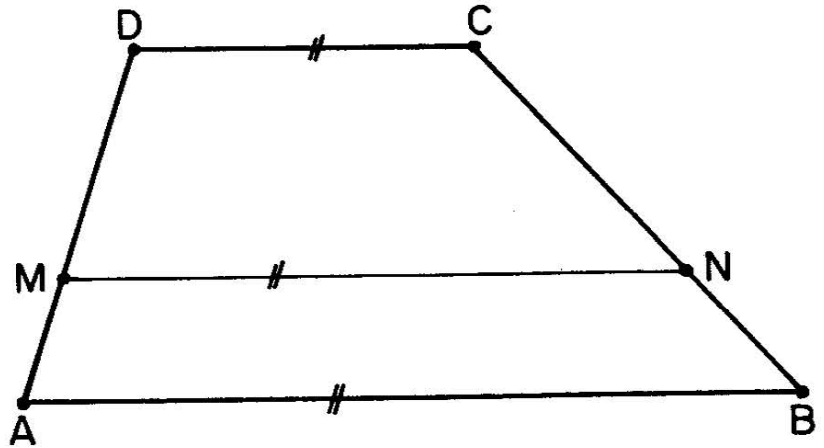
63. Na figura abaixo, ABCD é um trapézio, AB = 22, CD = 13, $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{1}{2}$ e $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{AB}$. O comprimento do segmento $\overline{MN}$ é:

A) 16

B) 17

C) 18

D) 19

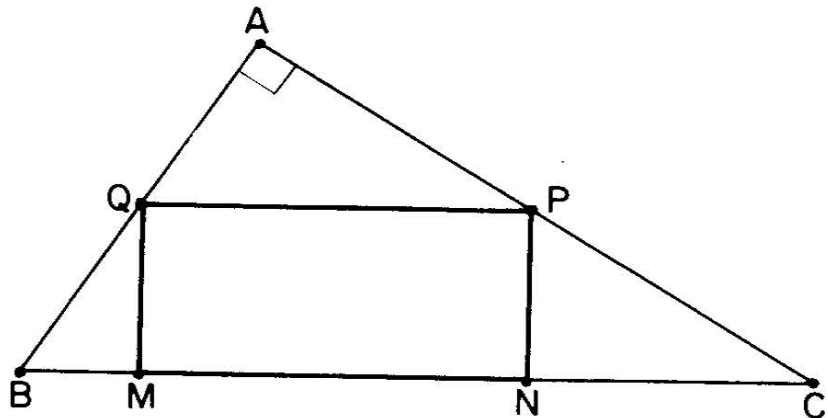
E) 20

64. Em um triângulo ABC retângulo em A inscreve-se um retângulo MNPQ ($\overline{MN}$ sobre $\overline{BC}$). Sendo BC = 20, BM = 4 e NC = 9, o perímetro do retângulo é:

A) 18

B) 20

C) 24

D) 26

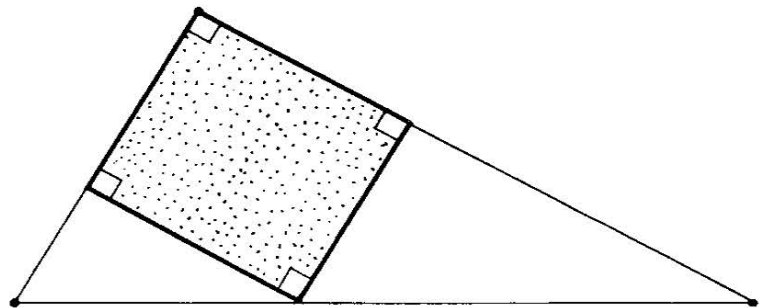
E) 30

65. Inscreve-se um quadrado em um triângulo retângulo ABC como mostra a figura Se os catetos do triângulo retângulo medem 12 e 24, o lado do quadrado mede

A) 7,5

B) 8

C) $\dfrac{17}{2}$

D) 9,25

E) NRA.

66. Um trapézio ABCD possui bases AB = a e CD = b. Pelo ponto de concurso das diagonais traça-se uma reta paralela às bases. Calcule o segmento desta paralela limitado pelos lados não paralelos:

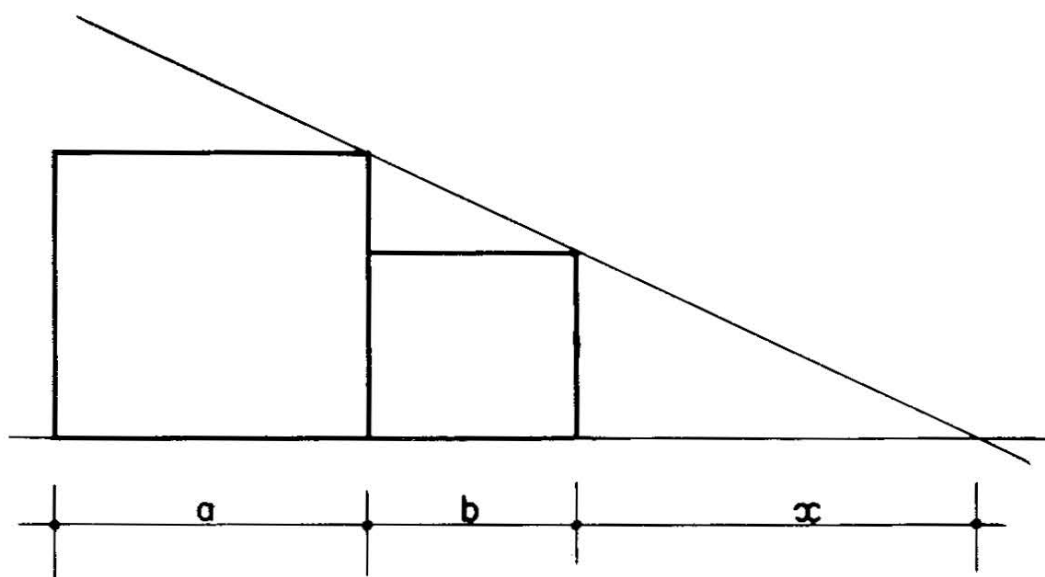
A) $\dfrac{ab}{a + b}$

B) $\dfrac{2ab}{a + b}$

C) $\dfrac{ab}{2(a + b)}$

D) $\dfrac{a(a - b)}{(a + b)}$

E) NRA.

67. Considere os quadrados da figura de lados a e b (a > b). Então, x vale:

A) $\dfrac{b^2}{a - b}$

B) $\dfrac{a^2}{a - b}$

C) $\dfrac{ab}{a + b}$

D) $\dfrac{ab}{a - b}$

E) NRA.

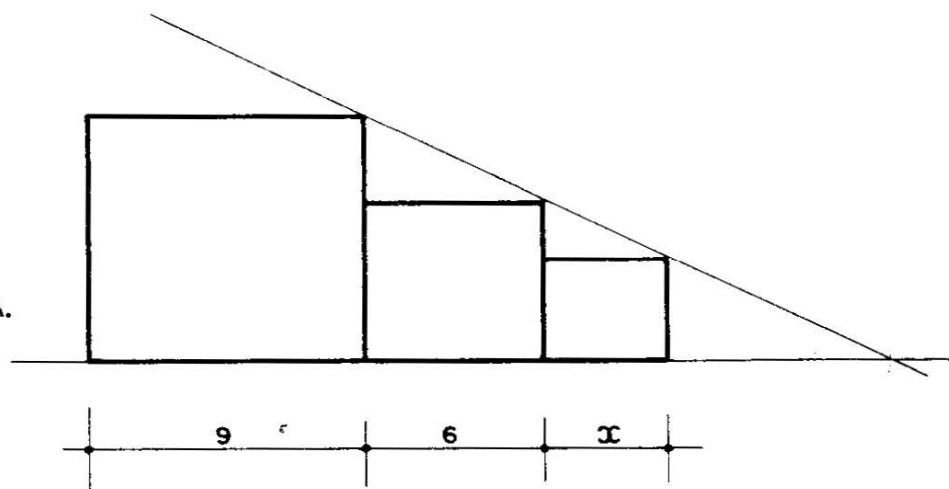
68. Considere os quadrados da figura. Calcule x.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 4,5

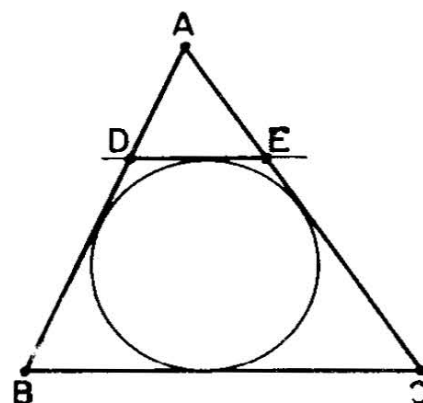
E) NRA.

69. O perímetro do triângulo ABC da figura é BO, sendo BC = 9 e $\overline{DE}$ paralela a BC, tangente ao círculo inscrito. Então, DE mede:

A) 3

B) $\frac{16}{5}$

C) $\frac{18}{5}$

D) 4

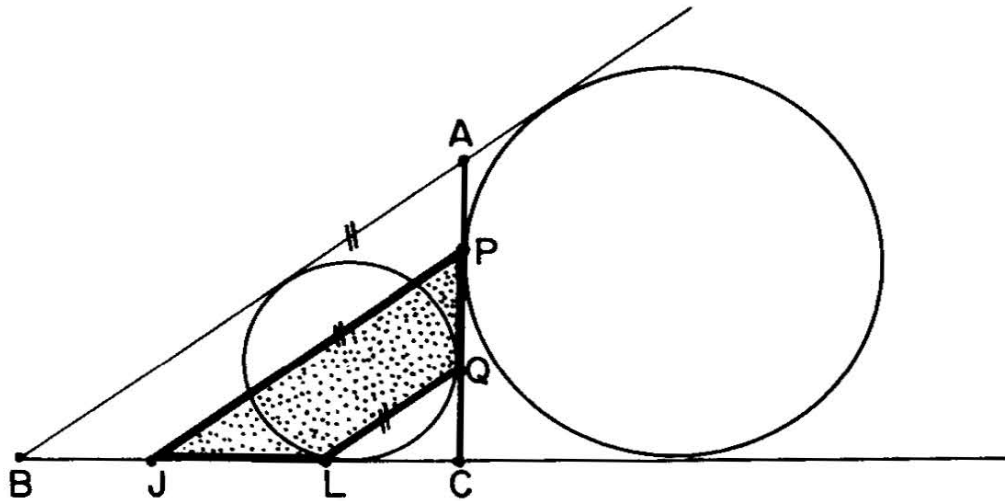
E) NRA.

70. Na figura, P e Q são os pontos de tangência dos círculos ex-inscrito e inscrito com o lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC e $\overline{PJ}$ e $\overline{QL}$ são paralelos a $\overline{AB}$. Se AB = 12, AC = 8 e BC = 10, o perímetro do trapézio PQLJ vale:

A) 15

B) $\frac{31}{2}$

C) 16

D) $\frac{33}{2}$

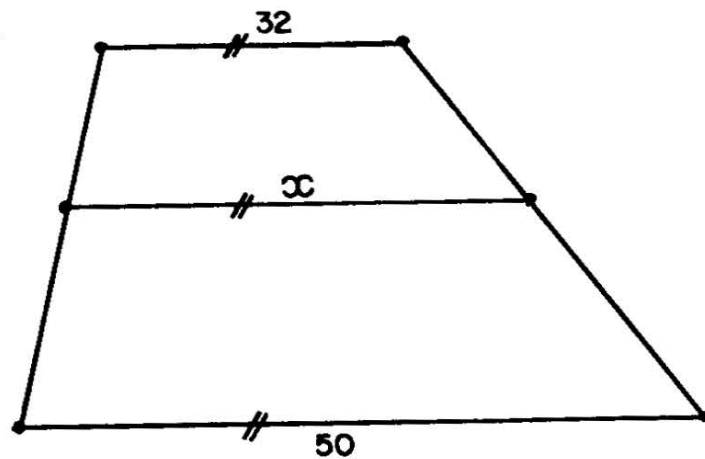
E) NRA.

71. Os trapézios da figura são semelhantes. Então, x vale:

A) 40

B) 41

C) 42

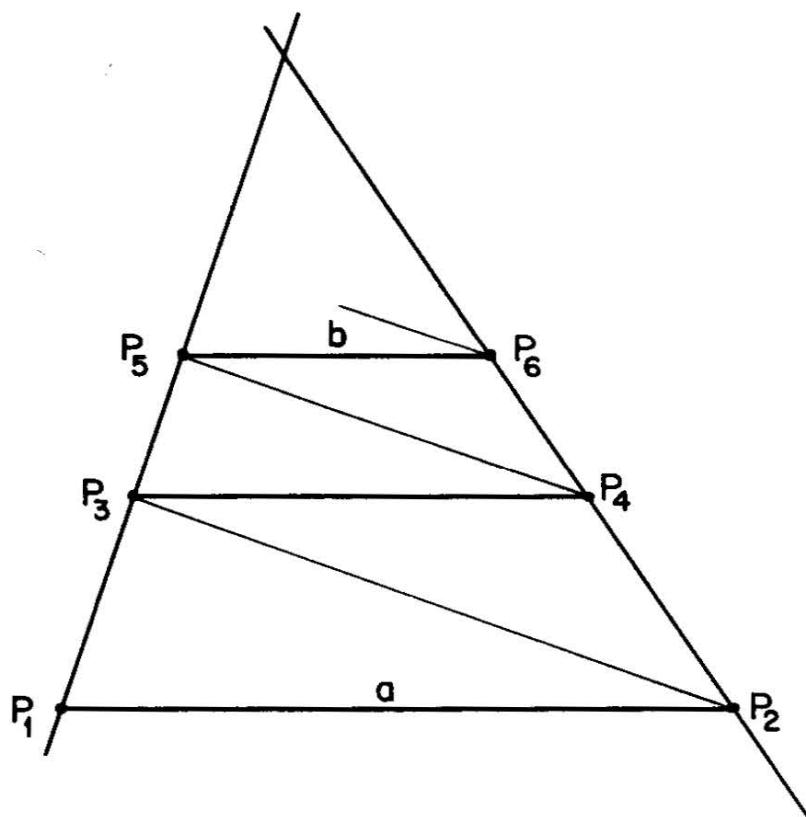
D) 38

E) NRA.

ENUNCIADO REFERENTE AS QUESTÕES 72 e 73.
Na figura ao lado, temos

$\overline{P_1P_2} \,//\, \overline{P_3P_4} \,//\, \overline{P_5P_6} \,//\, \ldots \,\overline{P_{2n-1}P_{2n}} \,//\, \ldots$

$\overline{P_2P_3} \,//\, \overline{P_4P_5} \,//\, \ldots \,\overline{P_{2n}P_{2n+1}} \,//\, \ldots$

$P_1P_2 = a$

$P_5P_6 = b$

72. P_3P_4 é igual a:

A) $\dfrac{a+b}{2}$

B) $\dfrac{ab}{2}$

C) $\sqrt{ab}$

D) $2\sqrt{ab}$

E) NRA.

73. O limite da soma $P_1P_2 + P_3P_4 + P_5P_6 + \ldots$ é:

A) $a + \sqrt{ab}$

B) $b + \sqrt{ab}$

C) $\dfrac{a(b+\sqrt{ab})}{a-b}$

D) $\dfrac{b(a+\sqrt{ab})}{a-b}$

E) $\dfrac{a(a+\sqrt{ab})}{a-b}$

74. Num círculo de raio igual a 12 está inscrito um triângulo ABC cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 8 e 9, respectivamente. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é igual a:

A) 3 C) 6

B) 4 D) 8

E) NRA.

75. No quadrilátero ABCD, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$. Traçamos por C paralelas $\overline{CE}$ e $\overline{CF}$ aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. Se AF = 8, FB = 3, AE = 4 e ED = 6, a diagonal AC mede:

A) 8 C) $10\sqrt{2}$

B) $8\sqrt{2}$ D) $12\sqrt{2}$

E) NRA.

76. Considerando a figura abaixo, a soma dos diâmetros de todos os círculos é:

A) 15 C) 8

B) 12 D) 6

E) NRA.

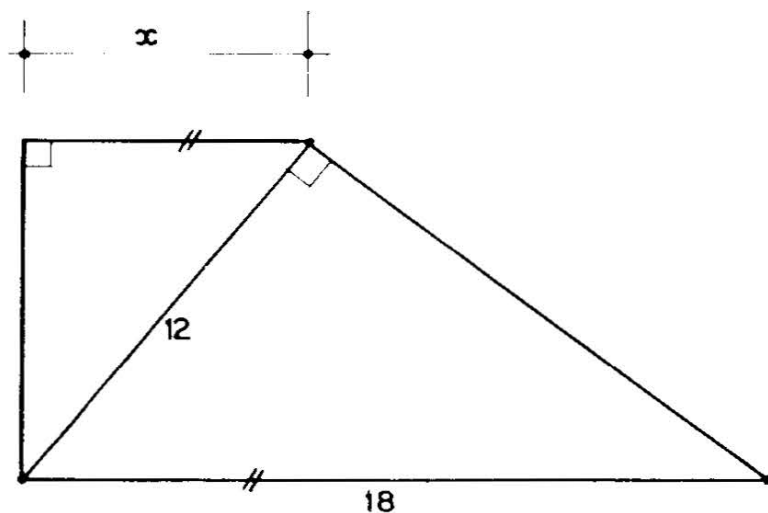
77. Calcule x na figura

A) 6

B) 8

C) 9

D) 10

E) NRA.

78. Se um trapézio retângulo tem diagonais perpendiculares e bases iguais, a sua altura é igual a:

A) 18

B) 19,5

C) 20

D) não se pode calcular

E) NRA.

79. Em um triângulo ABC, a bissetriz interna de $\hat{A}$ encontra $\overline{BC}$ em D e o círculo circunscrito em E. Se AB = 8, AC = 6 e DE = 3, calcule o comprimento da bissetriz AD.

A) 9

B) 10

C) 12

D) 13

E) NRA.

80. Os pontos E e D pertencem aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC e são tais que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. Sendo F o ponto de concurso de $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$, então

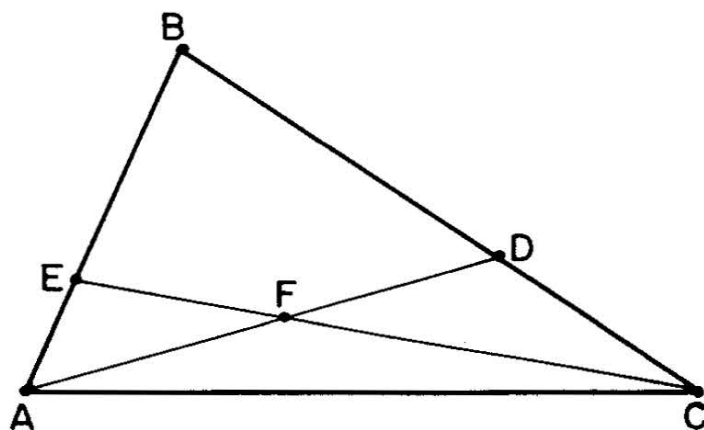
$$\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD} \text{ é igual a:}$$

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{3}{2}$

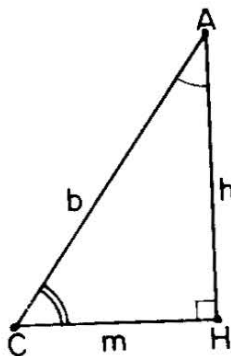
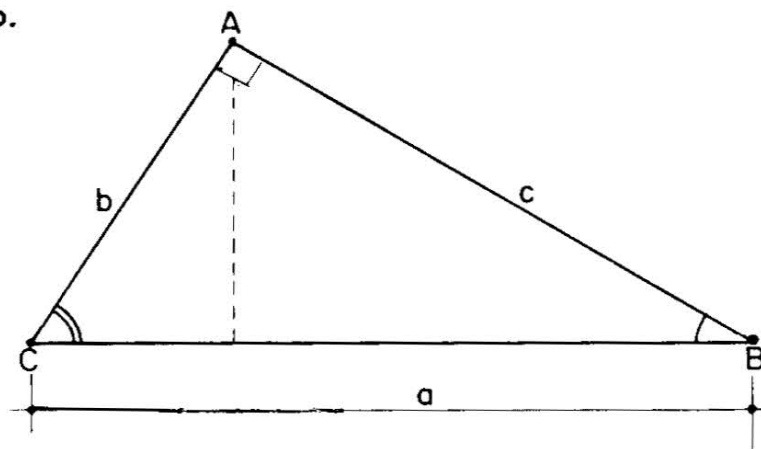
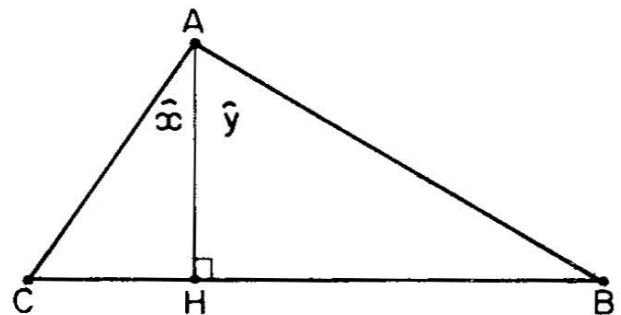
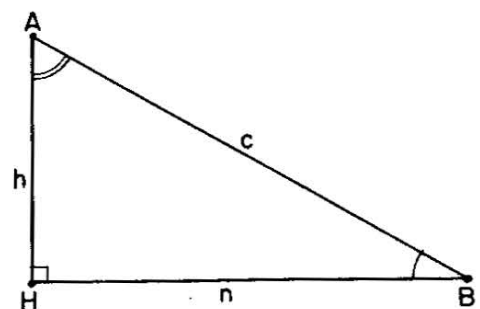
D) 2

E) $\frac{5}{2}$

CAPÍTULO 4

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

4.1 — RELAÇÕES MÉTRICAS

Seja ABC um triângulo retângulo em $\widehat{A}$ e seja $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa.

Fazendo $C\widehat{A}H = \widehat{x}$ e $B\widehat{A}H = \widehat{y}$, verificamos imediatamente que $\widehat{B} = \widehat{x}$ e $\widehat{C} = \widehat{y}$. Portanto, os triângulos retângulos HAC, HBA e ABC são semelhantes, como mostra a figura abaixo.

Temos, então,

$$\Delta HAC \sim \Delta ABC \implies \frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{m}{b} \implies$$

$$\implies \boxed{bc = ah} \quad \text{I}$$

$$\boxed{b^2 = am} \quad \text{II}$$

$$\Delta HBA \sim \Delta ABC \implies \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c} \implies$$

$$\implies \boxed{c^2 = an} \quad \text{III}$$

$$\Delta HAC \sim \Delta HBA \implies \frac{b}{c} = \frac{h}{h} = \frac{m}{h} \implies$$

$$\implies \boxed{h^2 = mn} \quad \text{IV}$$

A partir destas, conseguimos ainda duas outras relações importantes.

a) Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro II e III, temos

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n), \text{ mas } m + n = a \implies$$

$$\implies \boxed{b^2 + c^2 = a^2} \quad \text{V}$$

b) De I, temos $bc = ah \implies$

$$\implies b^2c^2 = a^2h^2$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} \implies$$

$$\implies \frac{1}{h^2} = \frac{c}{b^2c^2} + \frac{b^2}{b^2c^2} \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{VI}$$

concluímos, portanto, que em um triângulo retângulo,

a) cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela;

b) a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa;

c) o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos;

d) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura;

e) o inverso do quadrado da altura é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos.

4.2 — TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM LADOS EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Sejam $x - R \cdot x \cdot x + R$, $R > 0$ lados de um triângulo

retângulo. Então, por 4 · 1 — V,

$$(x + R)^2 = (x - R)^2 + x^2$$

$$x^2 + 2xR + R^2 = x^2 - 2xR + R^2 + x^2$$

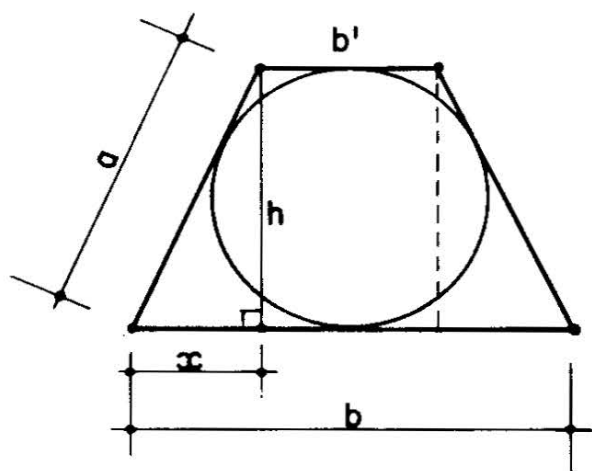
$$4xR = x^2 \quad \text{como} \quad x \neq 0,$$

$$x = 4R.$$

Os lados do triângulo retângulo são, portanto,

$$\boxed{3R, \quad 4R \quad e \quad 5R.}$$

4.3 — TRAPÉZIO ISÓSCELES CIRCUNSCRITÍVEL

A altura de um trapézio isósceles circunscritível pode ser calculada em função das bases do trapézio.

Porque o trapézio é circunscritível,

$$2a = b + b',$$

ou $$a = \frac{b + b'}{2}.$$

E também

$$2x = b - b'$$

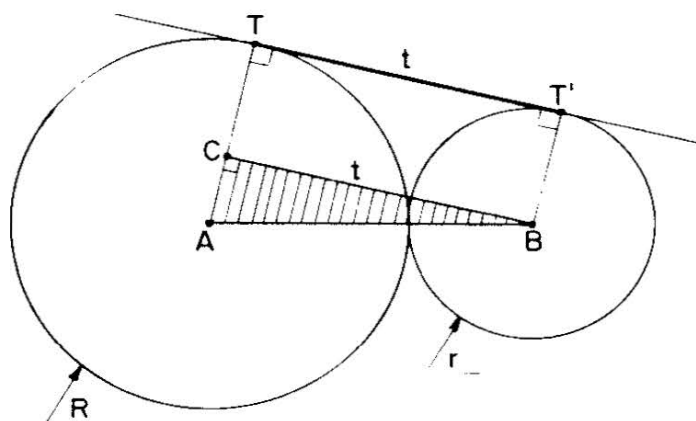
ou $$x = \frac{b - b'}{2}$$

Temos, então,

$$\left(\frac{b + b'}{2}\right)^2 = \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4bb' = 4h^2 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{h = \sqrt{bb'}.}$$

4.4 — TANGENTE COMUM A CÍRCULOS TANGENTES

Se dois círculos são tangentes exteriormente, o segmento da tangente comum externa pode ser calculado em função dos raios.

Sejam A e B centros de dois círculos tangentes exteriormente de raios R e r e $\overline{BC}$ paralelo a $\overline{TT'}$, como mostra a figura.

Temos

$$TT' = t$$

$$AB = R + r$$

$$AC = R - r$$

$$BC = t.$$

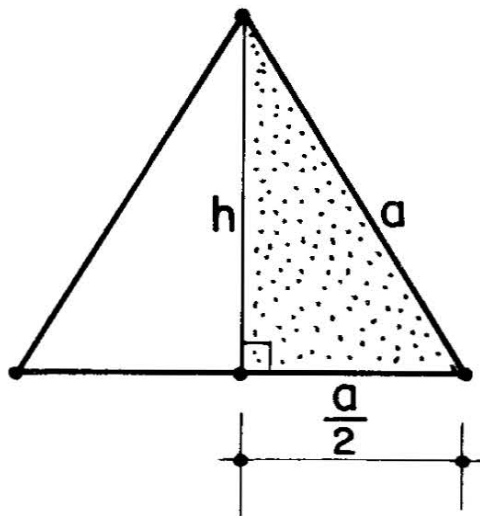
Do triângulo ABC, retângulo em C, vem

$$(R + r)^2 + (R - r)^2 + t^2$$

$$4Rr = t^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{t = 2\sqrt{Rr}.}$$

4.5 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

81. Calcule a altura do triângulo eqüilátero de lado a.

Solução

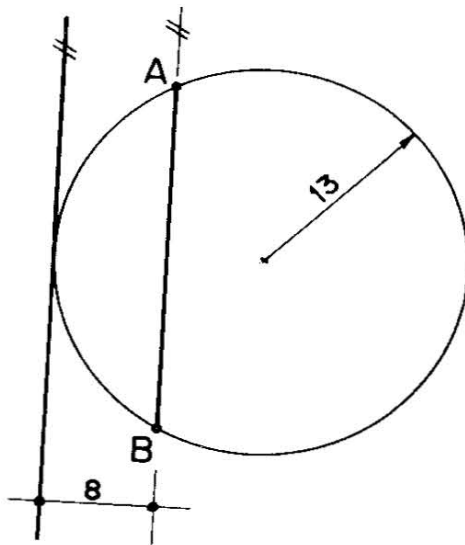
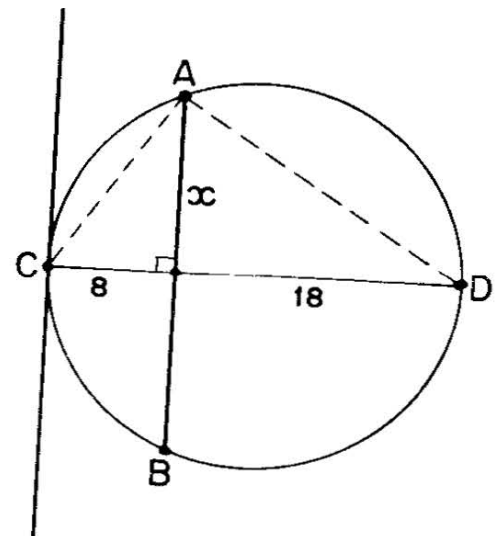
A relação de Pitágoras fornece

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad \text{ou}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \implies$$

$$\implies h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Resposta: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

82. Em um círculo de raio 13, considere uma tangente t e uma corda $\overline{AB}$ paralela a t, distando 8 dessa tangente. Calcule o comprimento da corda.

Solução

Consideremos o diâmetro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$ e o triângulo ACD, retângulo em $\widehat{A}$. Seja $x = \dfrac{AB}{2}$.

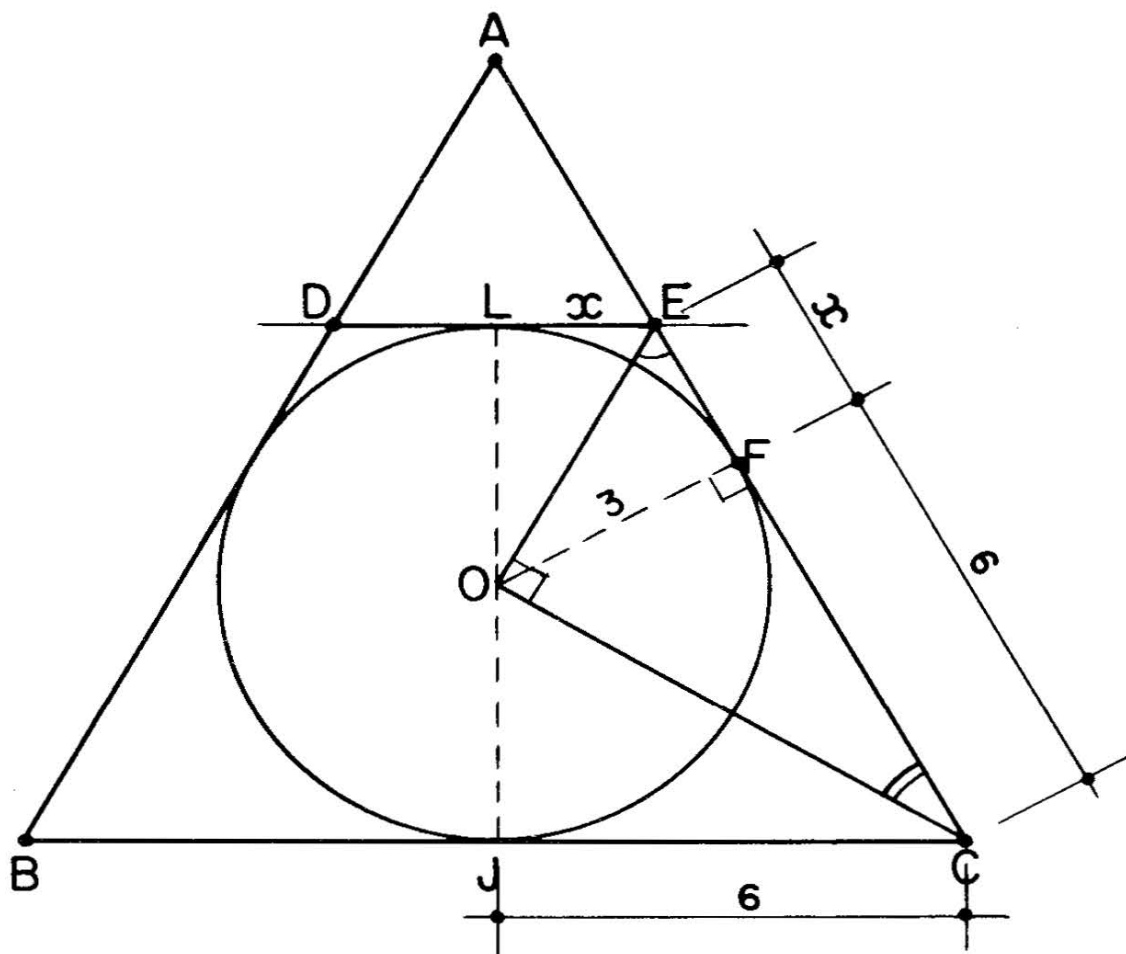
Aplicando a relação IV, temos

$$x^2 = 8 \cdot 18$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \Longrightarrow AB = 24.$$

Resposta: 24

83. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC = 12 circunscrito a um círculo de raio igual a 3. Uma parelala à base $\overline{BC}$ tangente ao círculo determina nos lados congruentes os pontos D e E. Calcule $\overline{DE}$.

1.ª Solução

Porque $\widehat{C} + \widehat{E} = 180°$, $\dfrac{\widehat{C}}{2} + \dfrac{\widehat{E}}{2} = 90°$, sendo a triângulo OCE

retângulo em O. Como $\overline{OF}$ é altura relativa à hipotenusa e como CJ = CF = 6 e EF = EL = x, a relação IV fornece

$$3^2 = 6 \cdot x \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \Longrightarrow DE = 3.$$

2.ª *Solução*

Como BCED é um trapézio isósceles circunscritível, por 4.3 temos

$BC = b = 12$ $\qquad h = \sqrt{bb'}$

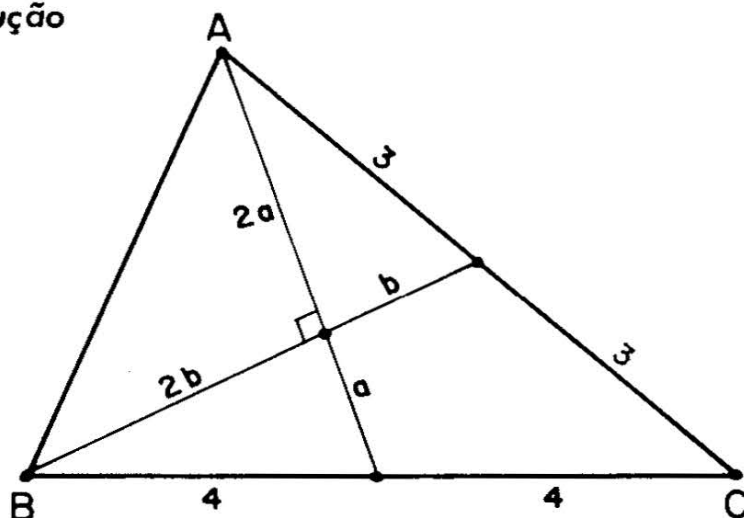
$DE = b'$

$JL = h = 6$ $\qquad 6^2 = 12 \cdot b' \Longrightarrow$

$\Longrightarrow b' = 3.$

Resposta: 3

84. Em um triângulo ABC, as medianas que partem de A e de B são perpendiculares. Se BC = 8 e AC = 6, calcule AB.

Solução

$$4a^2 + b^2 = 9$$

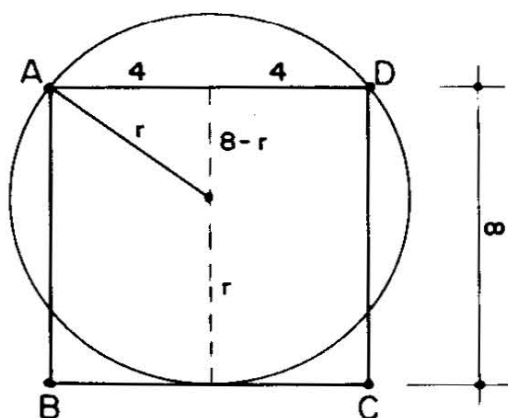
$$4b^2 + a^2 = 16. \text{ Somando}$$

$$5a^2 + 5b^2 + 25 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 5.$$

Então, $4a^2 + 4b^2 = 20 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow AB^2 = 20 \Longrightarrow AB = 2\sqrt{5}$$

Resposta: $2\sqrt{5}$

85. É dado um quadrado ABCD de lado 8. Traça-se um círculo tangente ao lado BC passando por A e D. Calcule o raio desse círculo.

Solução

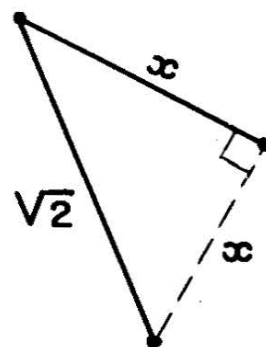
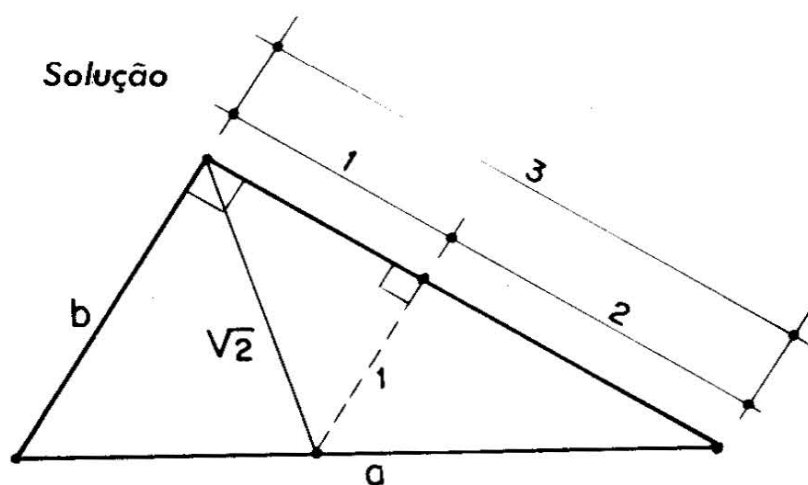
$$r^2 = 4^2 + (8 - r)^2$$

$$r^2 = 16 + 64 + r^2 - 16r$$

$$16r = 80$$

$$r = 5$$

Resposta: $r = 5$

86. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um dos catetos mede 3 e que a bissetriz do ângulo reto mede $\sqrt{2}$.

Solução

$$x^2 + x^2 = 2 \Longrightarrow$$

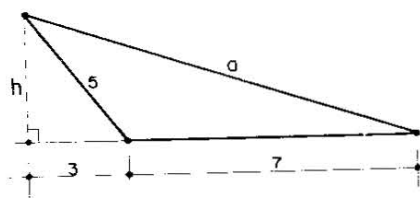
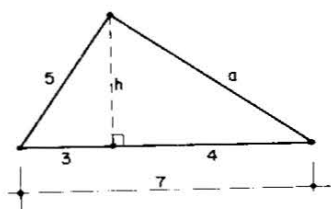
$$\Longrightarrow x = 1.$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{b} \Longrightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Resposta: $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

87. Calcule o lado *a* de um triângulo sabendo que os lados *b* e c medem respectivamente *5* e *7* e que a projeção de b sobre c mede 3.

Solução

1.ª hipótese: $\widehat{A} < 90°$

$5^2 = 3^2 + h^2 \Longrightarrow h = 4$

$a^2 = 4^2+4^2 = 2 \cdot 4^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a = 4\sqrt{2}$.

2.ª hipótese: $\widehat{A} > 90°$

$5^2 = 3^2 + h^2 \Longrightarrow h = 4$

$a^2 = 4^2+10^2 = 116 \Longrightarrow$

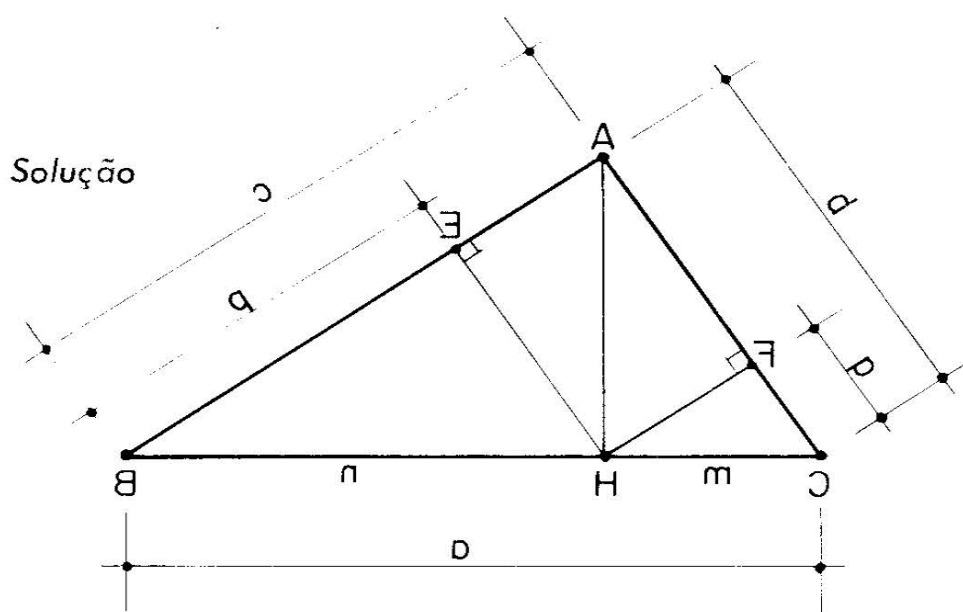
$\Longrightarrow a = 2\sqrt{29}$.

Resposta: $4\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{29}$.

88. Num triângulo ABC, retângulo em A, traçam-se a altura $\overline{AH}$ e os segmentos $\overline{HE}$ e $\overline{HF}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ e AC, respectivamente.

Se BE = p e CF = q, prove que

$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Solução

$\triangle BEH \sim \triangle BAC \Longrightarrow \dfrac{n}{a} = \dfrac{p}{c}$

mas $c^2 = an$ ou $n = \dfrac{c^2}{a} \cdot$ Logo,

$$\frac{\frac{c^2}{a}}{a} = \frac{p}{c} \Longrightarrow c^3 = a^2 p \Longrightarrow c^6 = a^4 p^2 \qquad (1)$$

$\triangle CHF \sim \triangle CBA \Longrightarrow \dfrac{m}{a} = \dfrac{q}{b}$

mas $b^2 = am$ ou $m = \dfrac{b^2}{a} \cdot$ Logo,

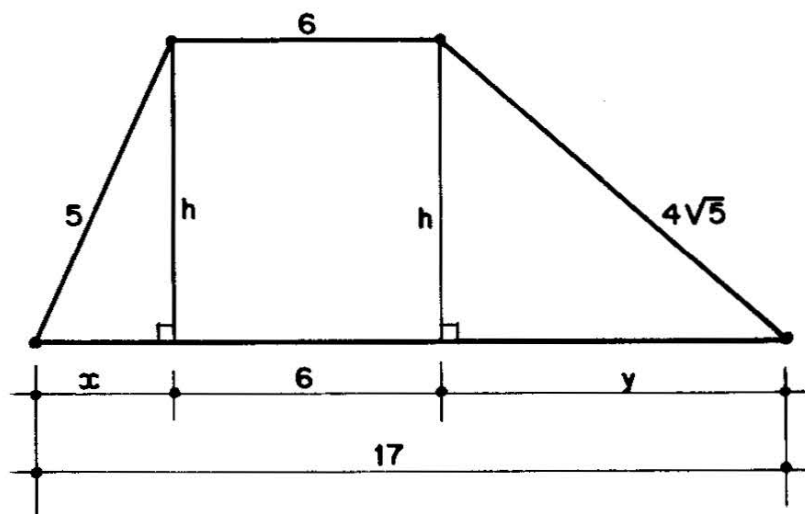
$$\frac{\frac{b^2}{a}}{a} = \frac{q}{b} \Longrightarrow b^3 = a^2 q \Longrightarrow b^6 = a^4 q^2 \qquad (2)$$

Como $b^2 + c^2 = a^2$, temos

$$\sqrt[3]{a^4 p^2} + \sqrt[3]{a^4 q^2} = \sqrt[3]{a^6} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

C.Q.D.

89. As bases de um trapézio medem 17 e 6. Os lados não paralelos medem 5 e $4\sqrt{5}$. Calcule a altura desse trapézio.

Solução

$$x + y + 6 = 17 \Longrightarrow x + y = 11$$

$$25 = h^2 + x^2$$

$$80 = h^2 + y^2.$$

Subtraindo,

$$55 = (y^2 - x^2) = (y + x)(y - x)$$

$$55 = 11(y - x) \Longrightarrow y - x = 5$$

$$\left.\begin{aligned} y + x &= 11 \\ y - x &= 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 3,\ y = 8$$

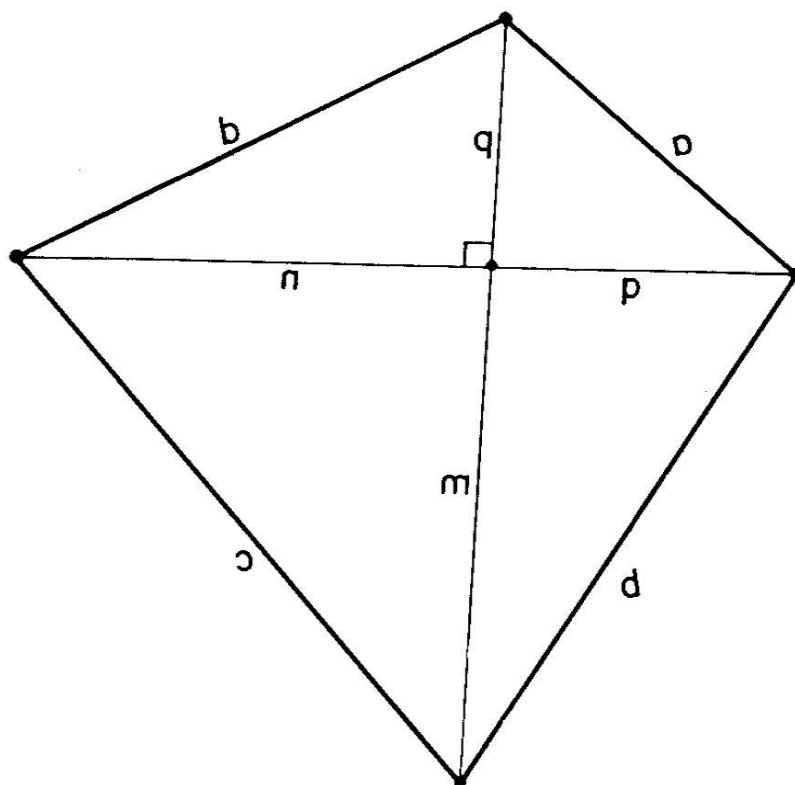
$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow h = 4$$

$$h^2 = (4\sqrt{5})^2 - 8^2 = 80 - 64 = 16 \Longrightarrow h = 4$$

Resposta: 4.

90. Se a, b, c e d são lados de um quadrilátero de diagonais perpendiculares, prove que

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Solução

$$a^2 = p^2 + q^2$$

$$c^2 = m^2 + n^2$$

$$d^2$$

$$a^2 + c^2 = p^2 + q^2 + m^2 + n^2 \implies$$

$$b^2$$

$$\implies \boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

91. Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. A razão desta progressão é:

A) $\sqrt{5}$

B) $1 + \sqrt{5}$

C) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

D) $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

E) NRA.

92. Os catetos de um triângulo retângulo medem 15 e 20. A altura relativa à hipotenusa mede:

A) 8

B) 10

C) 12

D) 15

E) NRA.

93. Os catetos de um triângulo retângulo medem 3 e 6. A razão entre as projeções desses catetos sobre a hipotenusa é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{4}$

E) NRA.

94. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 e a altura a ela relativa mede 3. O menor cateto desse triângulo mede:

A) $2\sqrt{5}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $\sqrt{10}$

E) NRA.

95. Considere um triângulo eqüilátero ABC de lado 12, uma altura $\overline{AH}$ e o ponto M, médio dessa altura. O segmento $\overline{BM}$ mede:

A) $\sqrt{18}$

B) $\sqrt{28}$

C) 6

D) $\sqrt{63}$

E) $\sqrt{98}$

96. Considere um ponto P no interior de um quadrado de lado a, de forma que tenha mesma distância a dois vértices consecutivos e ao lado oposto a esses vértices. Se d é a distância comum, então d vale:

A) $\frac{3a}{5}$

B) $\frac{5a}{8}$

C) $\frac{3a}{8}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{a}{2}$.

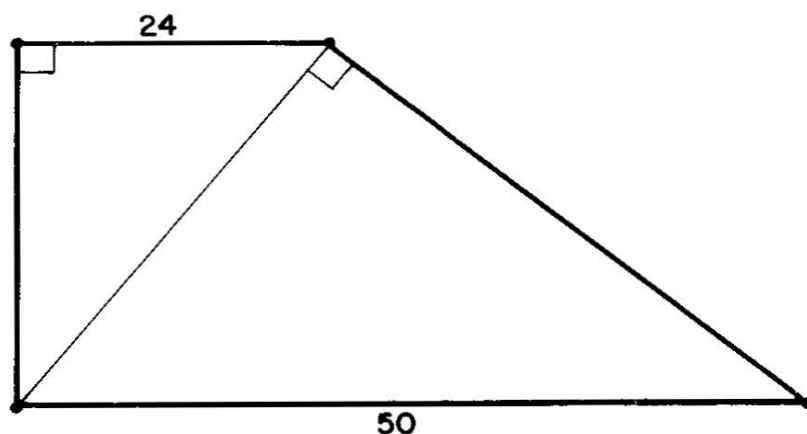
97. Calcule o perímetro do trapézio da figura

A) 120

B) 132

C) 138

D) 145

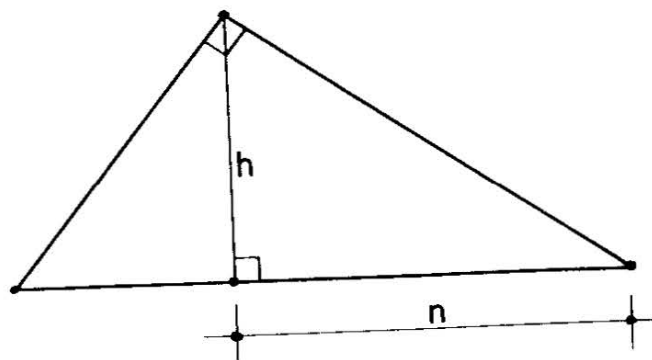
E) NRA.

98. Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo sendo h = 9 e n = 12.

A) 16

B) 18

C) 18,5

D) 20

E) NRA.

99. Em um triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 18 e 32. O perímetro desse triângulo é igual a:

A) 120

B) 125

C) 132

D) 150

E) NRA.

100. Em um trapézio isósceles de bases 5 e 3, a altura é igual a 2. Os lados congruentes do trapézio medem:

A) $\frac{5}{2}$
B) 3
C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{6}$
E) NRA.

101. As bases de um trapézio circunscrito a um círculo medem 9 e 6. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede:

A) 4,5
B) 6
C) 7,5
D) 8
E) NRA. (EPUSP — 66)

102. Em um trapézio retângulo de bases 1 e 3, a altura é igual a $\sqrt{3}$. Então assinale a afirmativa falsa:

A) o lado oblíquo às bases mede $\sqrt{7}$
B) a menor diagonal mede 2
C) a maior diagonal mede $2\sqrt{3}$
D) uma das diagonais é perpendicular ao lado oblíquo às bases
E) uma das anteriores é falsa.

103. O raio do círculo inscrito em um triângulo equilátero de lado igual a $6\sqrt{3}$ mede:

A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $\sqrt{6}$
D) 3
E) NRA.

104. Um trapézio isósceles é circunscrito a um círculo. Se seu perímetro é 36 e uma base é o quíntuplo da outra, a altura desse trapézio mede:

A) 6
B) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$
C) $3\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{2}$
E) NRA.

105. Num triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a está inscrito um círculo. O raio desse círculo é:

A) $\dfrac{b+c-a}{2}$

B) $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$

C) $\sqrt{a^2 - b^2}$

D) $\dfrac{a+b+c}{2}$

E) NRA. (FEIUC — 67)

106. Dois círculos de raios 9 e 4 são tangentes exteriormente. O comprimento do segmento da tangente comum externa mede:

A) 6

B) 8

C) 9

D) 10

E) 12

107. A distância entre os centros de dois círculos é 37. Se os raios desses círculos medem 20 e 8, o segmento da tangente comum externa mede:

A) 30

B) 32

C) 33

D) 34

E) 35

108. A distância entre os centros de dois círculos é 53. Se os raios desses círculos medem 20 e 8, o segmento da tangente comum interna vale:

A) 45

B) 46

C) 48

D) 50

E) 52

109. Considere um triângulo ABC de catetos $\overline{AB} = 5a$ e $AC = 4a$. Pelo ponto M, médio de $\overline{AC}$, trace $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AC}$. Se N é exterior ao triângulo e se $MN = a$, BN mede:

A) $7a$

B) $a\sqrt{40}$

C) $5a\sqrt{2}$

D) $\dfrac{15a}{2}$

E) NRA.

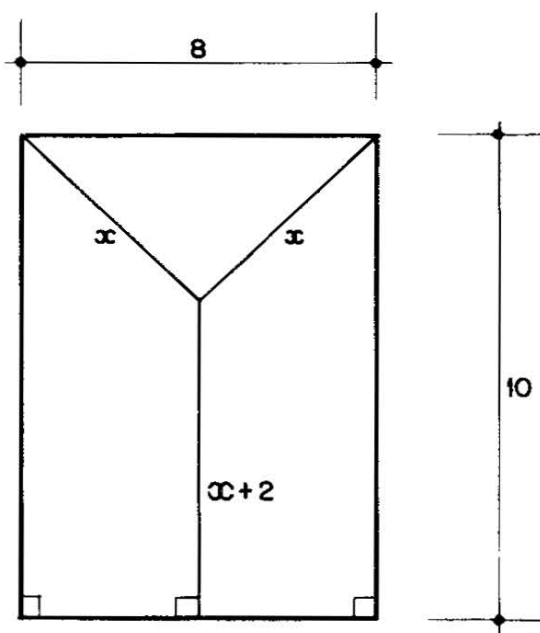
110. Calcule x na figura

A) 4

B) 4,5

C) 5

D) 6

E) NRA.

111. O perímetro de um triângulo retângulo é 12 e a altura relativa à hipotenusa mede 2. A hipotenusa desse triângulo mede:

A) 5

B) $\frac{36}{7}$

C) 6

D) $\frac{41}{8}$

E) NRA.

112. O raio do círculo inscrito em um losango de diagonais 2 e 4 mede:

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

E) NRA.

113. Um trapézio retângulo de bases a e b possui diagonais perpendiculares. A altura desse trapézio mede:

A) $\frac{ab}{a+b}$

B) $\frac{a+b}{2}$

C) $\sqrt{ab}$

D) não pode ser calculada

E) NRA.

114. Considere um quadrado Q de lado a e cinco círculos de mesmo raio r, interiores a Q, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de Q. Então, r é igual a:

A) $\dfrac{a(2-\sqrt{2})}{3}$

B) $\dfrac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{8}$

C) $\dfrac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

D) $\dfrac{a}{5}$

E) nada disso.

(CICE — 70)

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 115 E 116

As retas r e s são perpendiculares a t, como mostra a figura. Sabe-se que $AB = 2a$, $BC = 3a$ e que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{BD}$.

115. AD mede:

A) a

B) $2a$

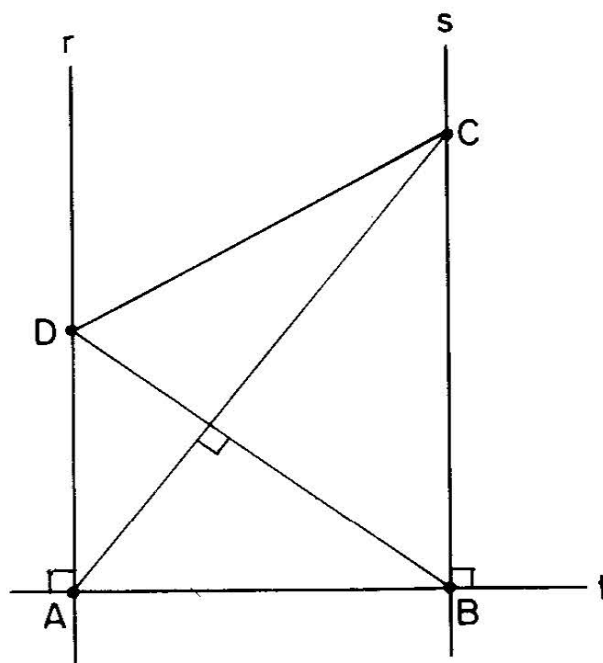
C) $\dfrac{3}{2}a$

D) $\dfrac{4}{3}a$

E) NRA.

116. DC mede:

A) $\dfrac{5}{2}a$

B) $3a$

C) $2a\sqrt{7}$

D) $\dfrac{a}{3}\sqrt{61}$

E) NRA.

117. O raio do círculo inscrito em um setor circular de raio r e ângulo de $60°$ é:

A) $\frac{r}{2}$ C) $\frac{r}{4}$

B) $\frac{r}{3}$ D) $\frac{r}{5}$

E) NRA. (EPUSP — 67)

118. P é um ponto interior a um retângulo ABCD e tal que PA = 3 PB = 4 e PC = 5. Então, PD mede:

A) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$

E) 2.

119. É dado um triângulo ABC retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. ($b < c$). Pelo ponto M, médio da hipotenusa $\overline{BC}$, traça-se $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{BC}$ ($N \in \overline{AC}$). O círculo circunscrito ao quadrilátero CAMN tem raio igual a:

A) $\frac{a^2}{2c}$ C) $\frac{a^2}{4c}$

B) $\frac{a^2}{ab}$ D) $\frac{a^2}{4b}$

E) NRA.

120. Sejam b e c catetos e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos, então, afirmar que a equação

$$\frac{2}{b}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{c} = 0$$

A) tem sempre raízes reais

B) tem sempre raízes imaginárias

C) tem sempre raízes cuja soma dos quadrados é $4a^2$

D) só terá raízes reais se $h^2 > bc$

E) nada se pode afirmar.

121. Considere um semicírculo de centro O, diâmetro $\overline{AB}$ e raio R. Construa interiormente a esse semicírculo dois outros de diâmetros $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ e um círculo tangente interiormente ao primeiro e exteriormente ao segundo e terceiro semicírculos. O raio deste círculo é:

A) $\frac{R}{2}$ C) $\frac{R}{4}$

B) $\frac{R}{3}$ D) $\frac{2R}{5}$

E) NRA.

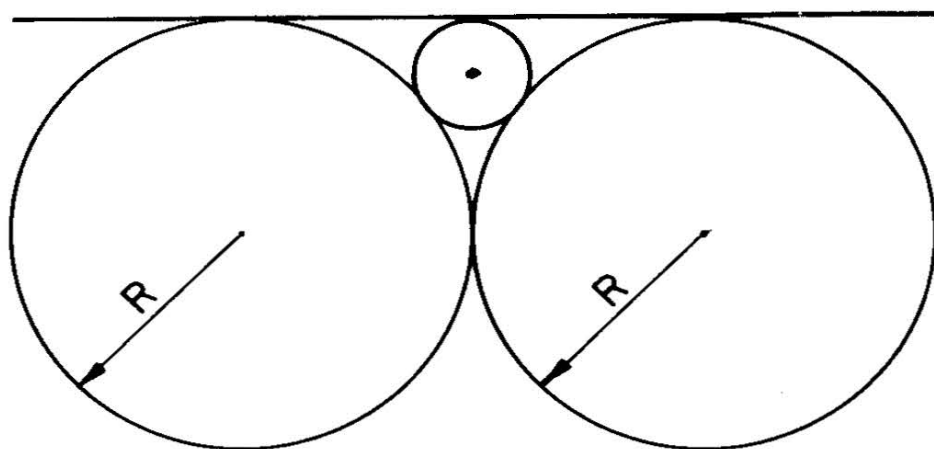
122. São dados dois círculos tangentes exteriormente de mesmo raio R. Calcule o raio do círculo tangente aos dois primeiros e a tangente comum externa.

A) $\frac{R}{2}$

B) $\frac{R}{3}$

C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{R}{5}$

E) NRA.

123. As bases de um trapézio retângulo circunscritível a um círculo medem 15 e 10. Sua altura mede:

A) 10 C) $8\sqrt{2}$

B) 12 D) $5\sqrt{5}$

E) NRA.

124. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo cujos lados medem 5, 5 e 6.

A) 1 C) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{3}{4}$ D) 2

E) NRA.

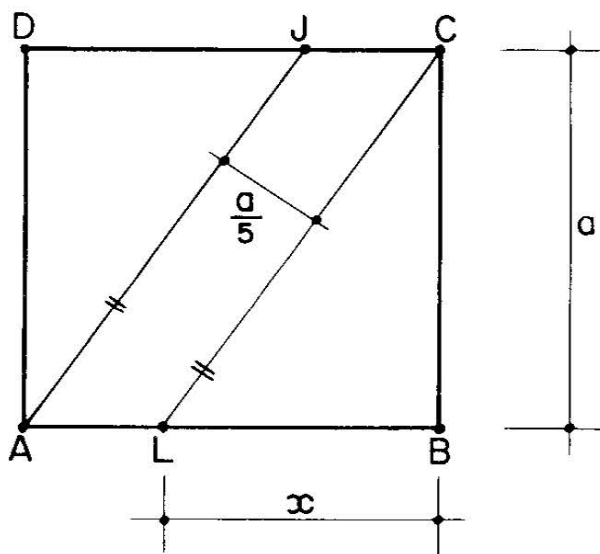
125. Seja ABCD um quadrado de lado a, como mostra a figura. Por A e C traçam-se $\overline{AJ}$ e $\overline{CL}$ paralelos. Se a distância entre essas paralelas é $\frac{a}{5}$, calcule DJ = BL = x.

A) $\frac{3a}{4}$

B) $\frac{3a}{5}$

C) $\frac{4a}{5}$

D) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

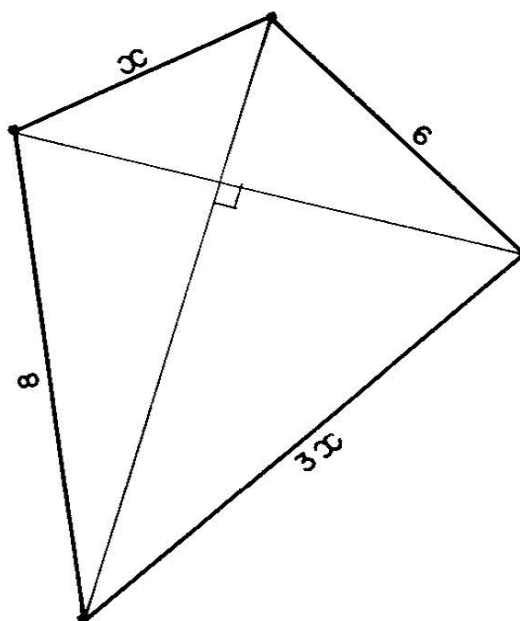
E) NRA.

126. Calcule x na figura

A) $\sqrt{5}$

B) $\sqrt{7}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $\sqrt{10}$

E) NRA

127. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um cateto é igual a 6 e que a projeção do outro sobre a hipotenusa é igual a 5.

A) $6\sqrt{3}$

B) $4\sqrt{2}$

C) 8

D) $\frac{28}{3}$

E) 9.

128. Em um círculo de raio 6 está inscrito um triângulo ABC onde $\widehat{A} = 45°$. Então,

A) $AB = AC$

B) $BC = 6$

C) $BC = 6\sqrt{2}$

D) $BC = 3\sqrt{2}$

E) NRA.

129. Dois círculos de raios R e 4R são tangentes exteriormente e tangentes a uma reta nos pontos A e B. Então, AB vale:

A) $2R$

B) $\frac{7}{2}R$

C) $\frac{10}{3}R$

D) $4R$

E) $5R$.

130. Calcule x na figura sabendo que $\overline{AB}$ é um diâmetro e t é tangente em B no círculo.

A) 10

B) 12

C) 15

D) 18

E) NRA.

131. Dois círculos de raios 8 e 10 são ortogonais. O comprimento da corda comum é:

A) $\sqrt{10}$

B) $\frac{4}{3}\sqrt{10}$

C) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$

E) NRA.

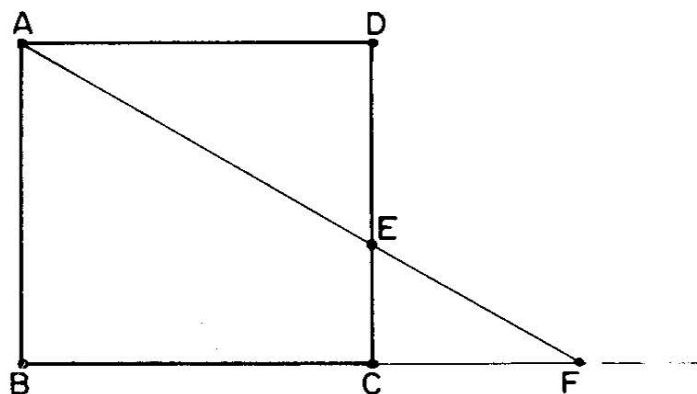
132. Pelo vértice A de um quadrado ABCD traça-se uma secante que encontra $\overline{CD}$ em E e o prolongamento de $\overline{BC}$ em F. Se AE = 3 e EF = 1, o lado do quadrado mede:

A) $\frac{9}{5}$

B) $\frac{10}{3}$

C) $\frac{9}{2}$

D) $\frac{15}{7}$

E) $\frac{12}{5}$

133. Calcule a altura de um trapézio isósceles de bases iguais a 10 e 6 sabendo que as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases

A) 3

B) 4

C) 5

D) $\sqrt{5}$

E) NRA.

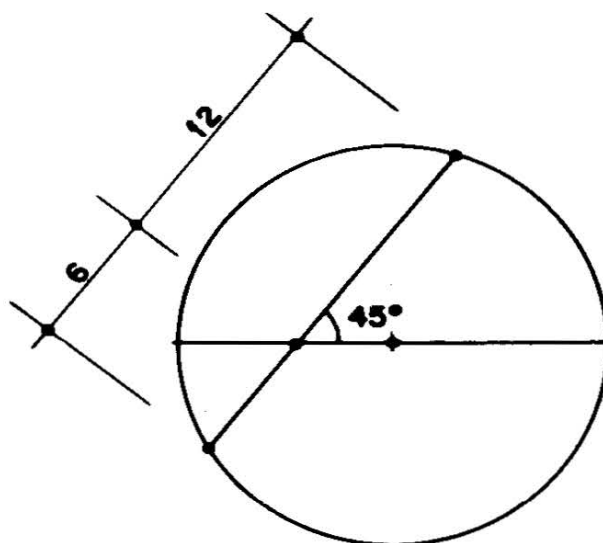
134. Uma corda de um círculo corta um de seus diâmetros segundo um ângulo de 45°. A corda fica então dividida em dois segmentos que medem 12 e 6. O raio desse círculo mede:

A) $2\sqrt{10}$

B) $3\sqrt{10}$

C) $6\sqrt{5}$

D) 10

E) NRA.

135. A base maior e um dos lados congruentes de um trapézio isósceles circunscritível medem respectivamente 16 e 10. A altura desse trapézio é igual a:

A) 4
B) 6
C) 8
D) 9
E) NRA.

136. Considere a figura que consiste em um segmento $\overline{AB}$ de comprimento a e dois arcos circulares AC e BC de raio a e centros respectivamente em B e A. O raio do círculo inscrito nessa figura, tangente ao segmento AB e aos arcos AC e BC, é:

A) $(\sqrt{2} - 1)\,a$

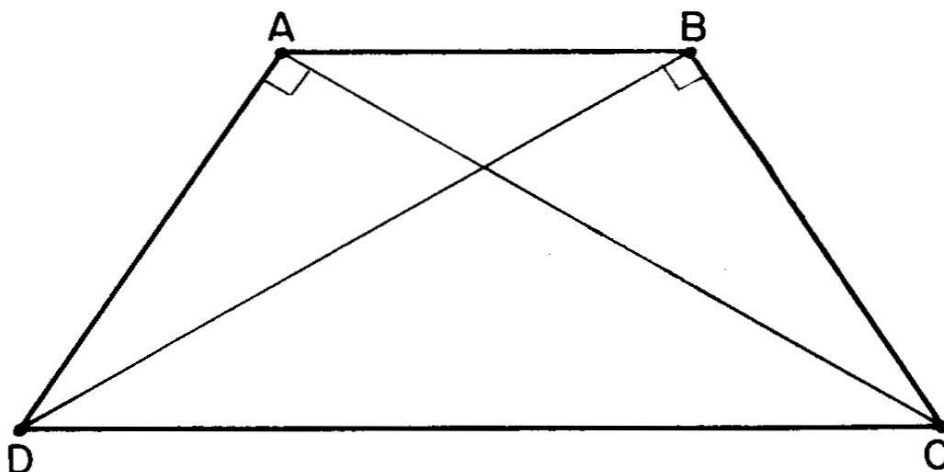
B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,a$

C) $\dfrac{3a}{8}$

D) $\dfrac{2a}{5}$

E) NRA.

(CICE — 70)

137. ABCD é um trapézio, CD = 25 e AD = 15

Então,

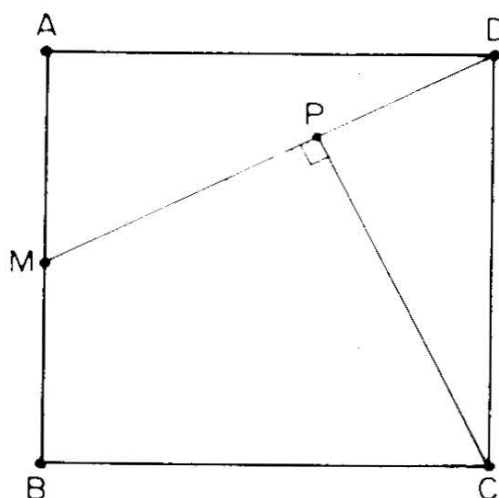
A) AC = BD = 24

B) sua altura vale 10

C) ABCD é circunscritível

D) AB = 7

E) NRA. (TESTE VETOR — 72)

138. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado, Calcule seu lado sabendo que M é ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{CP}$ perpendicular a $\overline{MD}$ e MP = 3.

A) 5

B) $\sqrt{7}$

C) $2\sqrt{5}$

D) indeterminado

E) NRA.

(V.I. DEZ 71)

139. O raio do círculo circunscrito a um triângulo isósceles de base 6 e altura 9 é:

A) 4

B) 5

C) 6

D) 6,5

E) NRA.

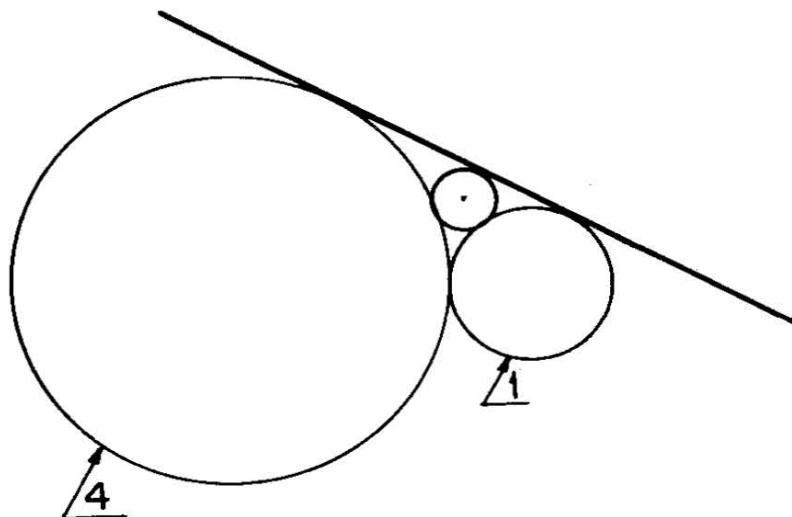
140. Dois círculos de raios 4 e 1 são tangentes exteriormente, como mostra a figura. Calcule o raio do círculo tangente a estes círculos e a tangente comum externa.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{9}$

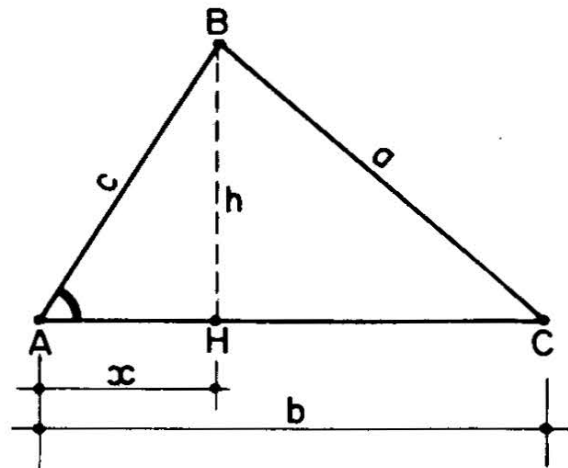
E) NRA.

CAPÍTULO 5

TRIÂNGULOS QUAISQUER

5.1 — LEI DOS CO-SENOS

Em um triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o duplo produto destes dois lados pelo co-seno do ângulo formado.

Demonstração

Seja ABC um triângulo de lados BC = a, AC = b e AB = C. Consideremos ainda a altura BH = h e a projeção AH = x do lado $\overline{AB}$ sobre o lado $\overline{AC}$.

Temos, então,

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BHC \implies a^2 = h^2 + (b - x)^2 \\ \Delta BHA \implies h^2 = c^2 - x^2\end{array}\right\} \implies$$

$$\implies a^2 = c^2 - x^2 + (b - x)^2 \implies$$

$$\implies a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \qquad (1)$$

$$\Delta BHC \implies \cos \widehat{A} = \frac{x}{c} \implies$$

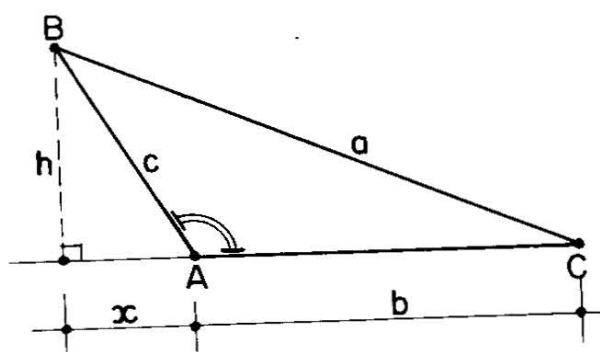
$$\implies x = c \cdot \cos \widehat{A}.$$

Substituindo 8 em (1), teremos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos \widehat{C}$$

Analogamente,

e

O leitor deve notar que não há alteração alguma se $\widehat{A} > 90°$, pois

$$\Longrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \quad (2)$$

mas $\frac{x}{c} = \cos(180° - \widehat{A}) = -\cos \widehat{A} \Longrightarrow x = -c \cos \widehat{A}$.

Assim, substituindo em (2), chegaríamos novamente a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}.$$

5.2 — SÍNTESE DE CLAIRAUT

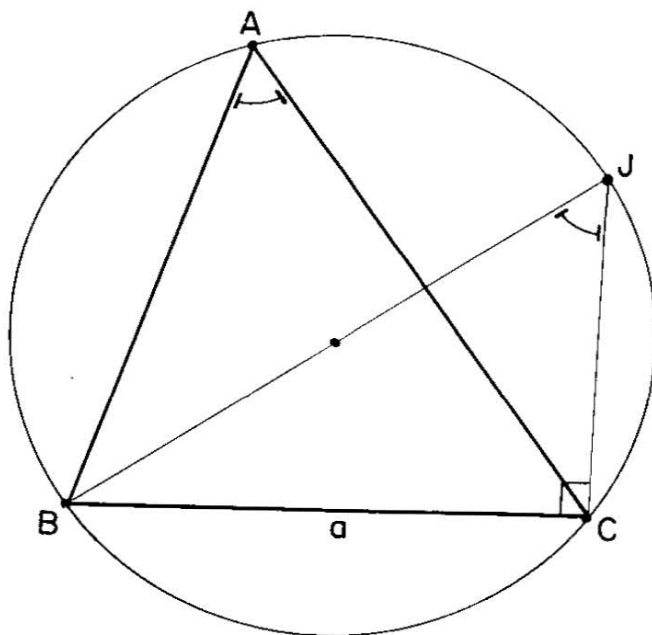
Observando a lei dos co-senos, podemos escrever

$$\widehat{A} < 90° \Longleftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$
$$\widehat{A} = 90° \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$
$$\widehat{A} > 90° \Longleftrightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

5.3 — LEI DOS SENOS (Lamy)

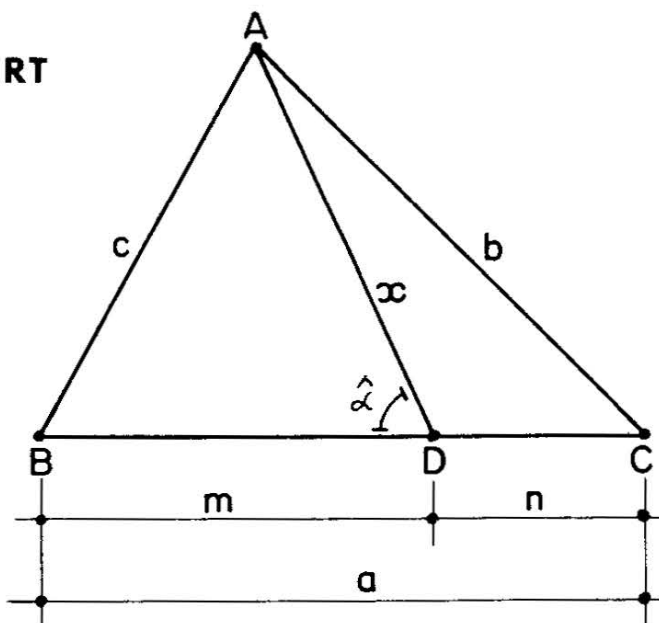
Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Demonstração

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c inscrito em um círculo de raio R e seja $\overline{BJ}$ um diâmetro desse círculo. Como o triângulo BJC é retângulo em C e como $\widehat{J} = \widehat{A}$, vem

$$\text{sen}\,\widehat{A} = \frac{a}{2R} \Longrightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = 2R.$$ Analogamente,

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = 2R}$$

5.4 — RELAÇÃO DE STEWART

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c e seja x o comprimento de uma ceviana $\overline{AD}$ que divide $\overline{BC}$ em dois segmentos m e n.

Da lei dos co-senos vem

$$\Delta ABD \qquad c^2 = x^2 + m^2 - 2xm \cos \alpha \qquad (1)$$

$$\Delta ADC \qquad b^2 = x^2 + n^2 - 2xm \cos (180° - \alpha) \qquad (2)$$

Multiplicando a primeira equação por n, a segunda por m e lembrando que $\cos (180° - \alpha) = - \cos \alpha$, temos

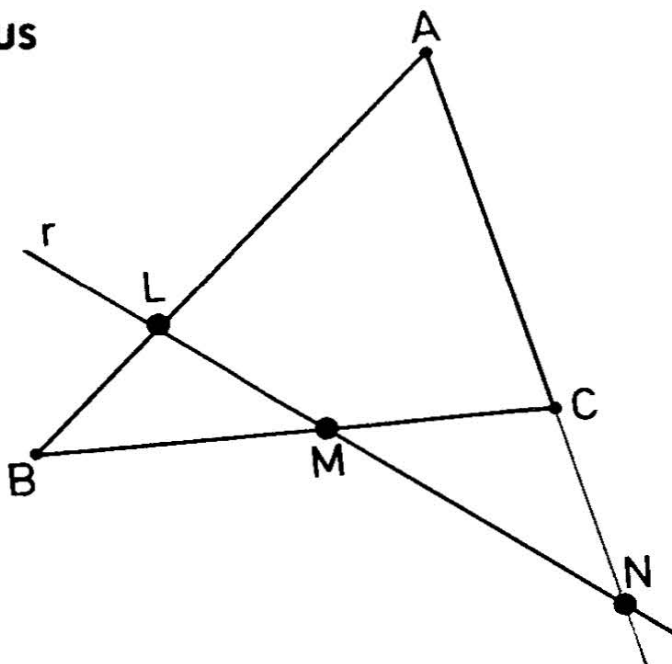
$$c^2n = x^2n + m^2n - 2xmn \cos \alpha$$

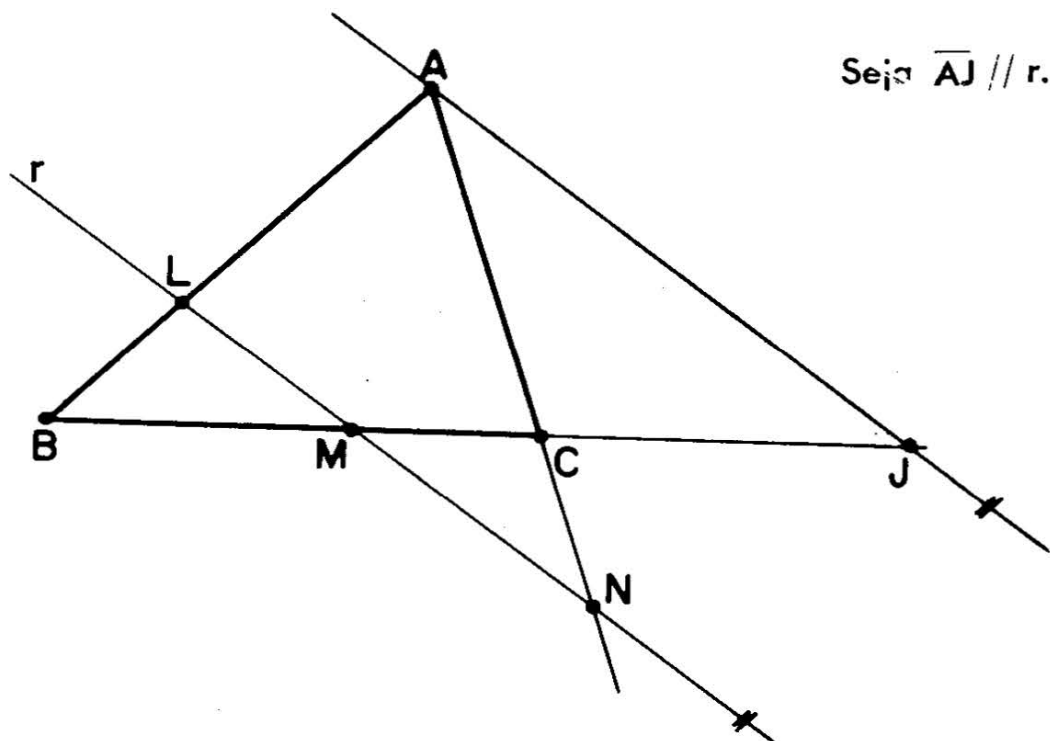
$$b^2m = x^2m + n^2m + 2xmn \cos \alpha. \quad \text{Somando,}$$

$$b^2m + c^2n = x^2(m + n) + mn(m + n), \text{ mas } m + n = a,$$

$$\boxed{b^2m + c^2n = x^2a + mna.}$$

5.5 — TEOREMA DE MENELAUS

Uma reta qualquer determina, sobre os lados de um triângulo ABC, os pontos L, M e N, como mostra a figura.

Mostraremos que $\dfrac{LA}{LB} \cdot \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1.$

Seja $\overline{AJ} \parallel r$.

Considerando as paralelas e as secantes $\overline{BLA}$ e $\overline{BMJ}$, temos

$$\frac{LA}{MJ} = \frac{LB}{MB} \quad \text{ou} \quad \frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} = 1.$$

E agora, das secantes $\overline{MJ}$ e $\overline{AN}$, tiramos

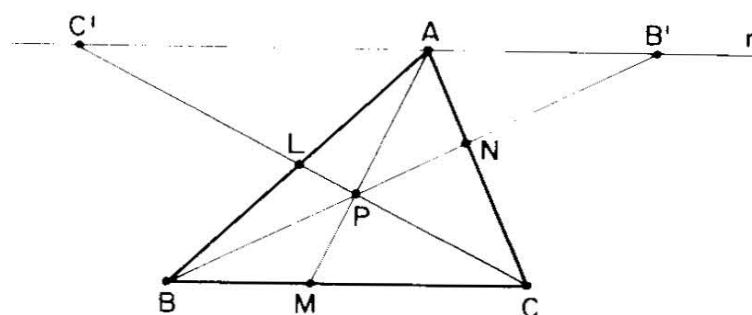
$$\frac{MJ}{NA} = \frac{MC}{NC} \quad \text{ou} \quad \frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1.$$

Multiplicando membro a membro, temos

$$\frac{LA}{MJ} \cdot \frac{MB}{LB} \cdot \frac{MJ}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.}$$

5.6 — TEOREMA DE CEVA

Consideremos em um triângulo ABC três cevianas, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$. Se essas três cevianas forem concorrentes, então $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$, e reciprocamente.

Seja $r \parallel \overline{BC}$.

Dos triângulos semelhantes formados, temos

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB'}{AC'}, \qquad \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AB'}, \qquad \frac{LA}{LB} = \frac{AC'}{BC}.$$

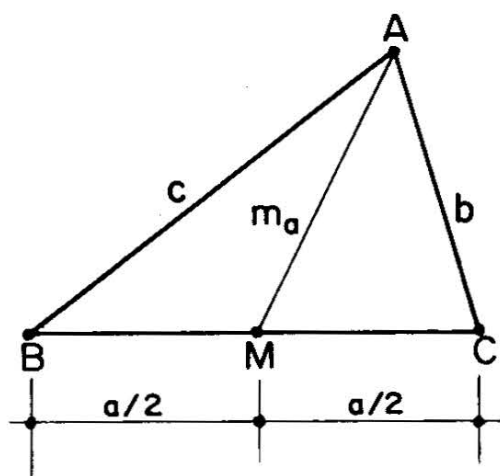
Multiplicando membro a membro,

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{AB'}{AC'} = \frac{BC}{AB'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1}$$

5.7 — CÁLCULO DAS PRINCIPAIS CEVIANAS

a) *Mediana*

Seja m_a a mediana relativa ao lado *a* de um triângulo ABC

A relação de Stewart fornece

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a$$

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2) = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

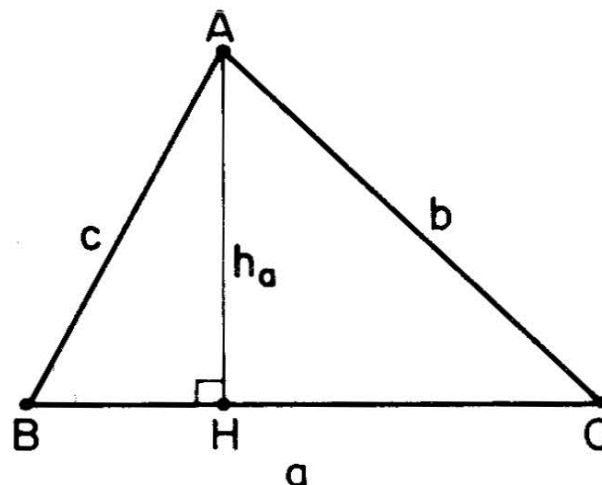
Analogamente,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

b) *Altura*

Seja h_a a altura relativa ao lado *a* de um triângulo ABC.

Da lei dos co-senos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\underbrace{ac \cos \widehat{B}}_{BH}$$

$$BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$h_a^2 = c^2 - \left[\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right]^2$$

$$h_a^2 = \frac{4\, a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ b + c - a &= 2\,(p - a) \\ a + c - b &= 2\,(p - b) \\ a + b - c &= 2\,(p - c) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$h_a^2 = \frac{16\; p(p - a)(p - b)(p - c)}{4a^2}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Analogamente, se

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ então

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ e

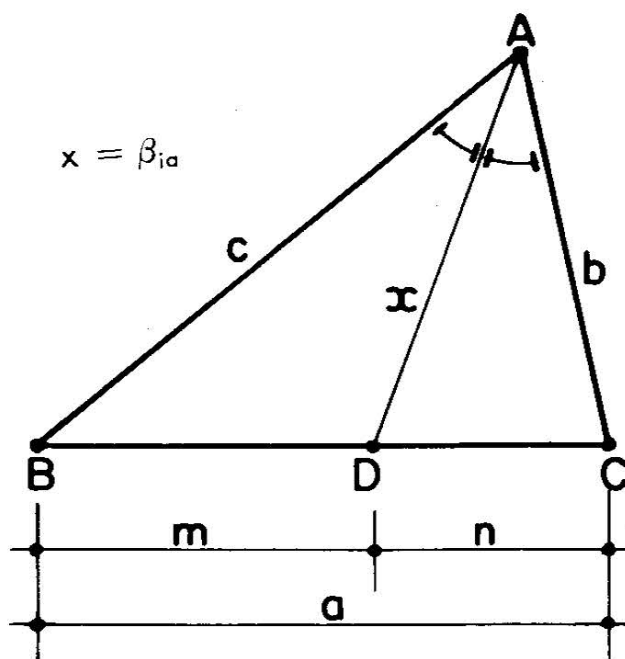
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

c) *Bissetriz interna*

Seja β_{ia} a bissetriz interna relativa ao lado *a* de um triângulo ABC.

De 2.7, temos

$$m = \frac{ac}{b+c}$$

$$n = \frac{ab}{b+c}$$

A relação de Stewart fornece

$$\frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} = x^2a + \frac{a^2bc \cdot a}{(b+c)^2}$$

$$\frac{bc\,(b+c)}{b+c} = x^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\frac{bc\,(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = x^2$$

$$x^2 = \frac{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc\,(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc\,.\,2p\,.\,2(p-a)}{(b+c)^2}$$

$$x^2 = \frac{4}{(b+c)^2}\,bcp(p-a)$$

$$x = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Analogamente, se

$$\beta_{ia} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}, \quad \text{então}$$

$$\beta_{ib} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)} \quad \text{e}$$

$$\beta_{ic} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp\,(p-c)}$$

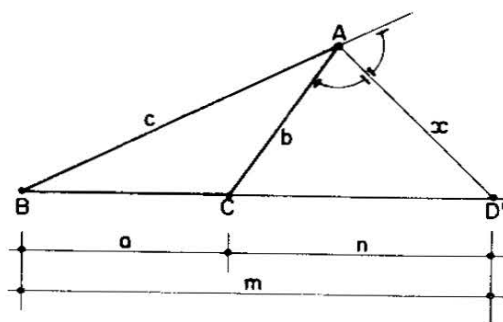
d) *Bissetriz externa*

Seja β_{ea} o comprimento da bissetriz externa relativa ao lado *a* de um triângulo ABC.

Ainda de 2-7, temos

$x = \beta_{ea}$

$$m = \frac{ac}{|c - b|}$$

$$n = \frac{ab}{|c - b|}$$

No triângulo ABD′, a relação de Stewart fornece

$$x^2 a + c^2 \frac{ab}{|c - b|} = b^2 \frac{ac}{|c - b|} + \frac{a \,.\, ab \,.\, ac}{(c - b)^2}$$

$$x^2 = \frac{-bc\,(b - c)^2 + bca^2}{(b - c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc[(a + b - c) \cdot (a + c - b)]}{(b - c)^2}$$

$$x^2 = \frac{bc \,.\, 2\,(p - b)\; 2\,(p - c)}{(b - c)^2}$$

$$x^2 = \frac{4}{(b - c)^2}\, bc\,(p - b)\,(p - c)$$

$$x = \frac{2}{|b - c|} \sqrt{bc\,(p - b)\,(p - c)}.$$

Analogamente, se

$$\beta_{ea} = \frac{2}{|b - c|} \sqrt{bc\,(p - b)\,(p - c)}, \quad \text{então}$$

$$\beta_{eb} = \frac{2}{|a - c|} \sqrt{ac\,(p - a)\,(p - c)} \cdot \quad \text{e}$$

$$\beta_{ec} = \frac{2}{|a - b|} \sqrt{ab\,(p - a)\,(p - b)}$$

5.8 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

141. Calcule o terceiro lado de um triângulo sabendo que os dois primeiros medem 5 e 8 e que formam 60°.

Solução

Temos $b = 5$, $c = 8$ e $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

Pela Lei dos Co-senos,

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \implies a = 7$$

Resposta: 7

142. Determine a natureza do triângulo cujos lados medem 12, 23 e 19.

Solução

Basta comparar

$$a^2 = 23^2 = 529$$

$$b^2 + c^2 = 12^2 + 19^2 = 144 + 361 = 505$$

Como $529 > 505$, ou seja, como

$a^2 > b^2 + c^2$, o triângulo é OBTUSÂNGULO.

143. Em um triângulo ABC, $AB = 10$, $AC = 14$ e $BC = 16$. Calcule $\cos \widehat{B}$.

Solução

Temos: $a = 16$

$b = 14$

$c = 10$

Pela Lei dos Co-senos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot \cos \widehat{B} \implies$$

$$\implies \cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \implies$$

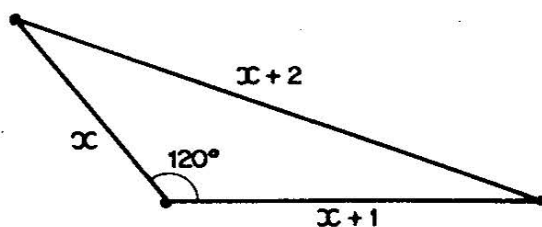
$$\implies \cos \widehat{B} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} \implies$$

$$\implies \cos \widehat{B} = \frac{256 + 100 - 196}{320} = \frac{160}{320} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $\cos \widehat{B} = \dfrac{1}{2}$

144. Calcule x no triângulo abaixo.

Solução

Pela Lei dos Co-senos, temos

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2 - 2 \cdot x\,(x + 1)\left(-\frac{1}{2}\right) \implies$$

pois $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$.

$$\implies x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \implies$$

$$\implies 2x^2 - x - 3 = 0 \implies \begin{cases} x = -1 \text{ (não serve)} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Resposta: $\dfrac{3}{2}$.

145. Um triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio igual a 13. Se $a = 10$, calcule $\cos \widehat{A}$.

Solução

Pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2R \implies \frac{10}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 26 \implies \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\widehat{A} = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\widehat{A}} = \pm\sqrt{1-\frac{25}{169}} = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$$

Resposta: $\pm\frac{12}{13}$.

146. O produto dos senos dos ângulos de um triângulo é $k\frac{abc}{R^3}$, onde a, b e c são os lados e R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo. Calcule k.

Solução

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R \implies$$

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{2R}, \quad \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{2R}, \quad \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{c}{2R}.$$

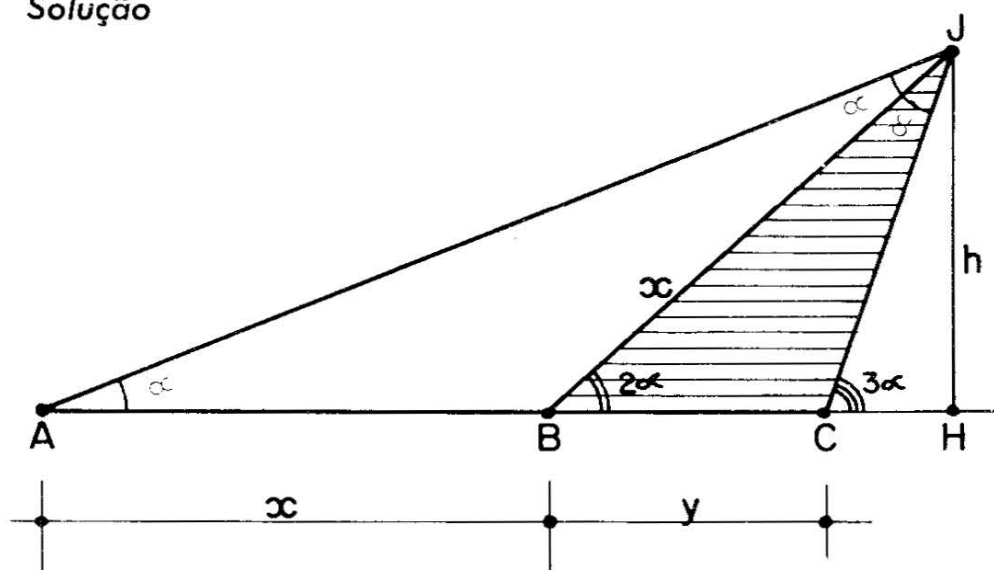
Então,

$$\operatorname{sen}\widehat{A} \,.\, \operatorname{sen}\widehat{B} \cdot \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{abc}{8R^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{abc}{R^3}.$$

Logo, $k = \frac{1}{8}$.

Resposta: $\frac{1}{8}$.

147. Um observador vê uma torre segundo um ângulo α. Aproxima-se x metros e passa a vê-la sob ângulo 2α. Aproxima-se mais y metros e passa a vê-la sob ângulo 3α. Calcule em metros a altura da torre desprezando a altura do observador.

Solução

Verificamos inicialmente que $A\widehat{J}B = B\widehat{J}C = \alpha$ e que $BJ = x$. No triângulo JBC a Lei dos Senos fornece

$$\frac{x}{\text{sen}\,(180 - 3\alpha)} = \frac{y}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\frac{x}{\text{sen}\,3\alpha} = \frac{y}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{x - y}{\text{sen}\,3\alpha - \text{sen}\,\alpha} = \frac{x - y}{2\cos 2\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}\,*$$

$$\frac{y}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{x - y}{2\cos 2\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha} \implies$$

$$\implies \cos 2\alpha = \frac{x - y}{y} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,2\alpha = \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

---

* $\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\cos\dfrac{p + q}{2} \cdot \text{sen}\,\dfrac{p - q}{2}$.

Do triângulo JBH,

$$h = JB \cdot \text{sen } 2\alpha \implies h = x \cdot \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$$

Resposta: $h = x \sqrt{1 - \frac{(x - y)^2}{4y^2}}$

148. Em um triângulo cujos lados medem: $a = 8$, $b = 7$ e $c = 5$ calcule: a) h_a, b) m_c c) β_{eb}.

Solução

$$\left.\begin{aligned} a &= 8 \\ b &= 7 \\ c &= 5 \end{aligned}\right\} \implies p = 10.$$

a) $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_a = \frac{2}{8}\sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

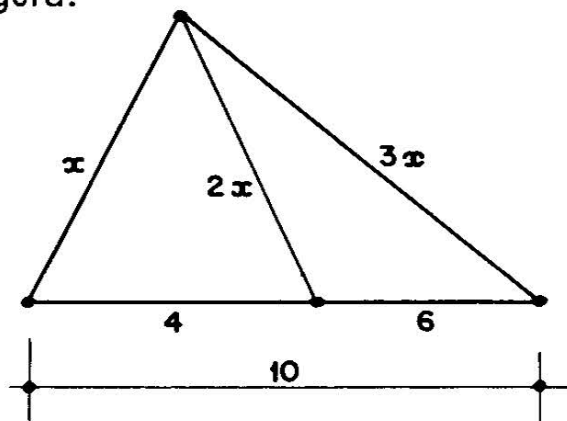
b) $$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(64 + 49) - 25} = \frac{1}{2}\sqrt{201}.$$

e) $$\beta_{eb} = \frac{2}{|a - c|}\sqrt{ac\,(p - a)(p - c)}$$

$$\beta_{eb} = \frac{2}{3}\sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{40}{3}$$

Respostas: a) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$, b) $\frac{1}{2}\sqrt{201}$, c) $\frac{40}{3}$

149. Calcule x na figura.

Solução

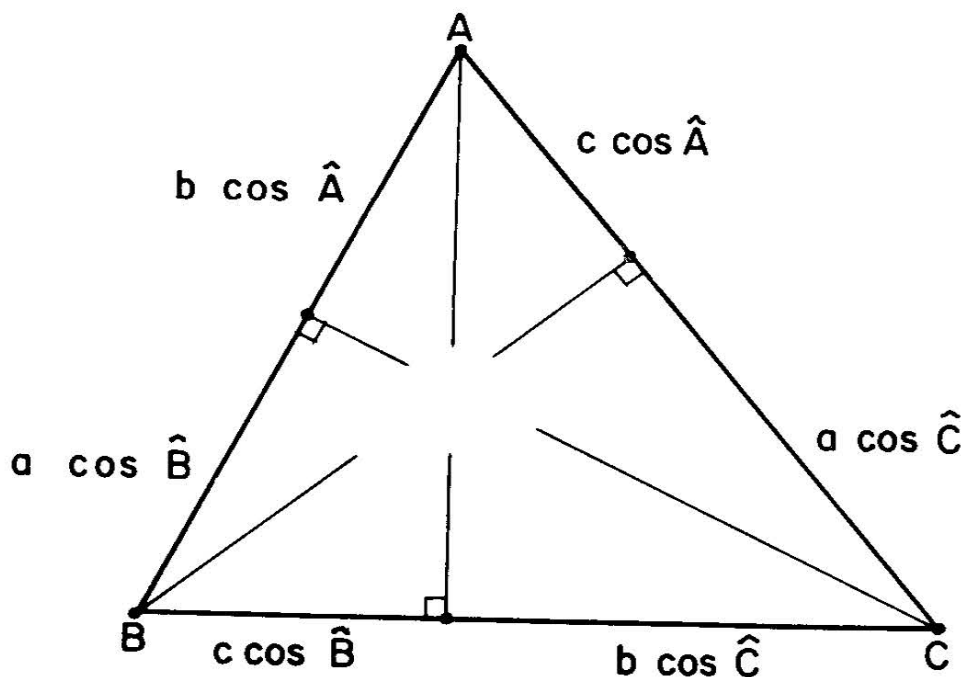
A relação de Stewart fornece

$$x^2 \cdot 6 + 9x^2 \cdot 4 = 4x^2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \cdot 10$$

$$2x^2 = 240$$

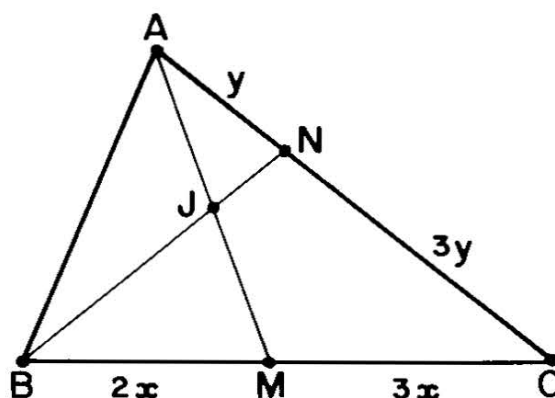
$$x^2 = 120, \qquad x = 2\sqrt{30}$$

Resposta: $2\sqrt{30}$.

150. Demonstre que as três alturas de um triângulo são concorrentes.

Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{b \cos \widehat{A} \cdot c \cos \widehat{B} \cdot a \cos \widehat{C}}{a \cos \widehat{B} \cdot b \cos \widehat{C} \cdot c \cos \widehat{A}} = 1.$$

151. Na figura abaixo, calcule a razão $\frac{JA}{JM}$.

Solução

Consideremos o triângulo AMC e a transversal $\overline{NJB}$. Pelo teorema de Menelaus,

$$\frac{JA}{JM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

$$\frac{JA}{JM} \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \frac{3y}{y} = 1 \implies \frac{JA}{JM} = \frac{5}{6}$$

Resposta: $\frac{5}{6}$.

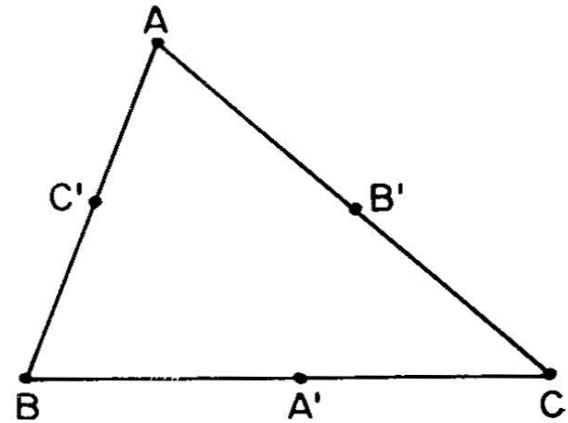
152. Demonstre que as três medianas de um triângulo são concorrentes.

Solução

Como

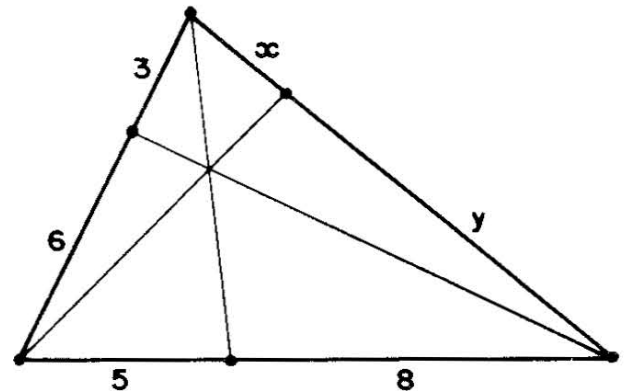
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

pelo teorema de Ceva

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1.$$

153. Calcule a razão $\frac{x}{y}$ na figura.

Solução

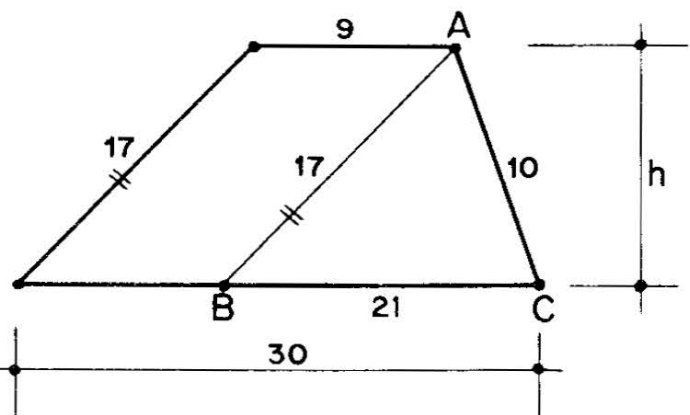
Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot y}{6 \cdot 8 \cdot x} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{16}$$

Resposta: $\frac{5}{16}$.

154. Calcule a altura de um trapézio cujas bases medem 30 e 9 e cujos lados não paralelos medem 17 e 10.

Solução

Calcularemos a altura do triângulo ABC

$$\left.\begin{array}{l} a = 21 \\ b = 10 \\ c = 17 \end{array}\right\} \Longrightarrow p = 24$$

$$h = \frac{2}{21}\sqrt{24\,(24 - 21)(24 - 10)(24 - 17)}$$

$$h = \frac{2}{21}\sqrt{24 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 7} = \frac{2}{21} \cdot 84 = 8.$$

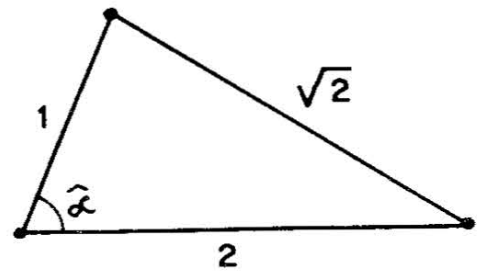
Resposta: 8

PROBLEMAS PROPOSTOS

155. O triângulo cujos lados medem 20, 29 e 21 é:

A) obtusângulo
B) isósceles
C) retângulo
D) acutângulo
E) NRA.

156. Calcule cos $\widehat{\alpha}$ na figura.

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{3}{4}$
E) NRA.

157. O triângulo cujos lados medem 56, 33 e 66

A) tem um ângulo de 30°
B) é acutângulo
C) é retângulo
D) é obtusângulo
E) NRA.

158. Em um triângulo ABC sabe-se que AC = 7, BC = 8 e $\widehat{B} = 60°$. Então, AB mede:

A) 5
B) 3
C) 5 ou 3
D) 4
E) NRA.

159. Calcule o lado *a* de um triângulo ABC sabendo que *b* e *c* medem 10 e 7 respectivamente e que a projeção de c sobre b mede 0,25.

A) 12
C) $\sqrt{143}$
B) 13
D) $\sqrt{129}$
E) NRA.

160. Calcule o co-seno do ângulo $\widehat{A}$ de um triângulo ABC, onde BC = 8, AC = 7 e AB = 5.

A) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{6}$
E) $\frac{1}{7}$

161. Calcule a tangente do ângulo $\widehat{C}$ de um triângulo ABC, onde AB = 6, AC = 5 e BC = 3.

A) $4\sqrt{14}$
C) $-4\sqrt{14}$
B) $\sqrt{14}$
D) $-\sqrt{14}$
E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 162 E 163

Em um triângulo ABC sabemos que AB = 6, $\widehat{A} = 60°$ e $\widehat{B} = 45°$.

162. O lado $\overline{AC}$ mede:

A) $6(\sqrt{3} - 1)$
C) $6(3 - \sqrt{3})$
B) $3(\sqrt{3} + 1)$
D) $3 + \sqrt{3}$
E) NRA.

163. A projeção do lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AB}$ mede:

A) $3 + \sqrt{3}$
C) $3(3 - \sqrt{3})$
B) $2(3 - \sqrt{3})$
D) $B(\sqrt{3} + 1)$
E) NRA.

164. Em um triângulo ABC cujos lados medem BC = 8, AC = 6 e AB = 4, considere o ponto M do interior do lado $\overline{BC}$ tal que CM = 2. Então, AM mede:

A) 4
B) $\sqrt{17}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{19}$
E) NRA.

165. Considere o triângulo ABC de lados AB = AC = 6 e BC = 4. Seja M o prolongamento do lado $\overline{AC}$ tal que $\frac{MC}{MA} = \frac{1}{3}$. Então, BM mede:

A) $\sqrt{30}$
B) $\sqrt{33}$
C) $\sqrt{35}$
D) $\sqrt{37}$
E) NRA.

166. Considere um quadrante AOB de raio R. Um ponto M do arco AB é tal que sua distância ao raio $\overline{OB}$ é a metade da sua distância no ponto A. Então, MA mede:

A) R
B) $\frac{4}{3}R$
C) $\frac{3}{2}R$
D) $\frac{2}{3}R$
E) NRA.

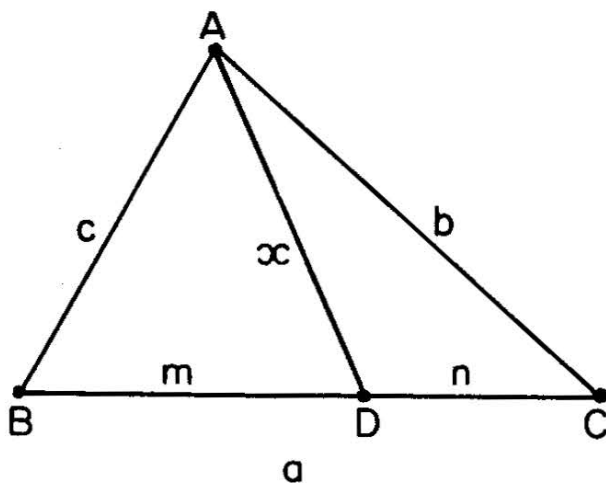
167. Em relação à figura abaixo, a partir da relação de Stewart é verdadeiro concluir que:

A) $\frac{b^2 + c^2}{m} = \frac{a^2 + x^2}{n}$

B) $\frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{am} = \frac{x^2}{mn}$

C) $\frac{c}{m} + \frac{b}{m} + \frac{x}{a} = 1$

D) $\frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{am} - \frac{x^2}{mn} = 1$

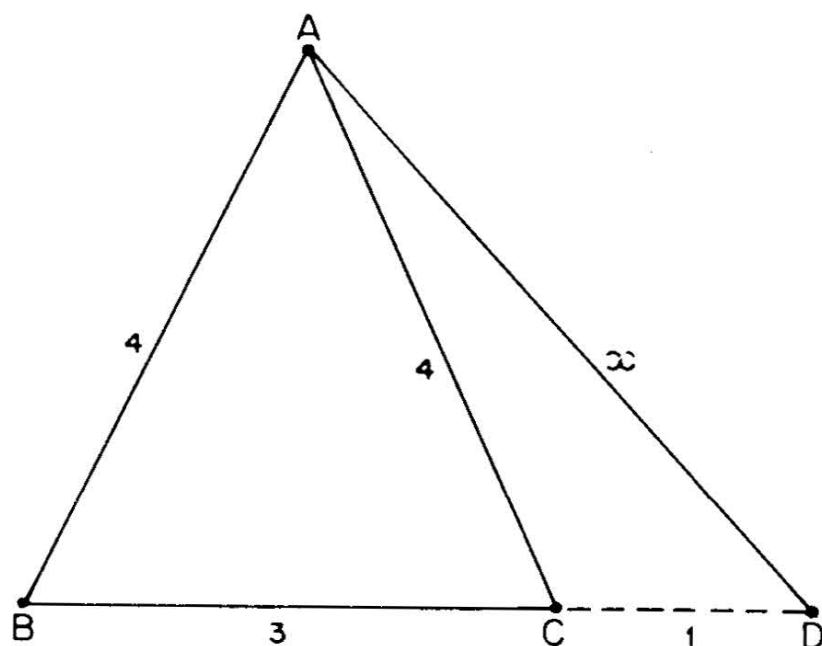
E) nada disso.

168. Calcule x na figura.

A) $\sqrt{5}$

B) $2\sqrt{5}$

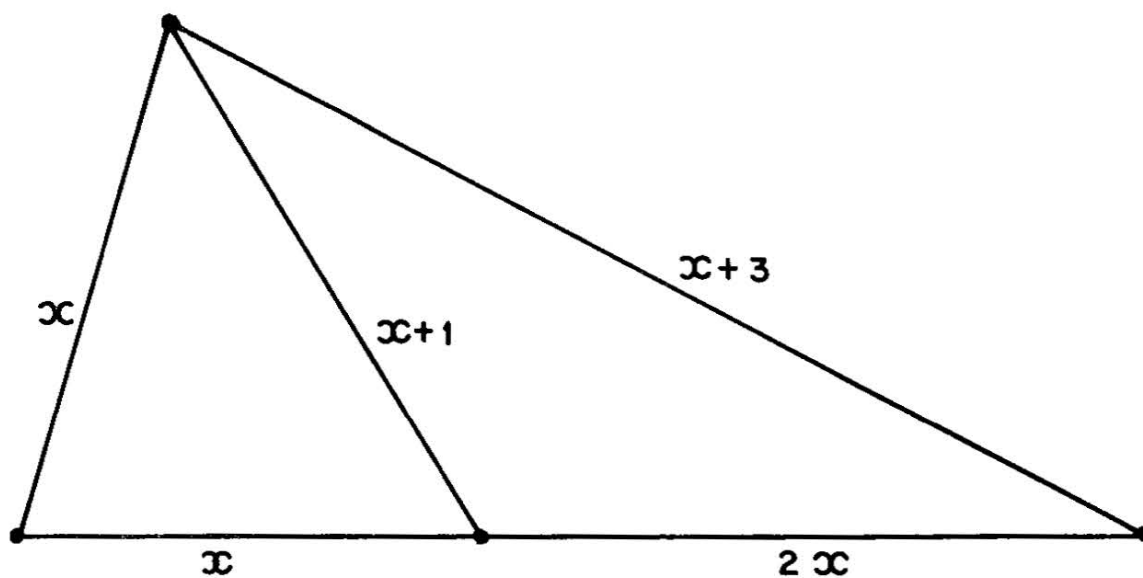
C) $3\sqrt{5}$

D) $3\sqrt{2}$

E) NRA.

169. Calcule x na figura.

A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D) o problema é impossível

E) NRA.

170. Em um triângulo de lados 5, 7 e 11, a menor mediana tem comprimento igual a:

A) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$
C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
B) $\frac{3}{2}\sqrt{35}$
D) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$
E) NRA.

171. Em um triângulo cujos lados medem 24, 20 e 16, quantas vezes $\sqrt{7}$ está contida na altura relativa ao maior lado?

A) 5
C) 7
B) 6
D) 8
E) NRA.

172. Se os lados de um triângulo medem: $a = 12$, $b = 10$ e $C = 8$, a bissetriz externa relativa ao lado c tem comprimento igual a:

A) $15\sqrt{2}$
C) $25\sqrt{2}$
B) $20\sqrt{2}$
D) $30\sqrt{2}$
E) NRA.

173. Se os lados de um triângulo medem: $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$, então a razão entre a altura relativa ao lado a e a bissetriz interna relativa ao lado b é:

A) $\frac{10}{13}$
C) $\frac{5}{8}$
B) $\frac{13}{10}$
D) $\frac{8}{5}$
E) NRA.

174. Os lados de um triângulo ABC medem: $AB = 13$, $AC = 15$ e $BC = 14$. Se H é o ortocentro do triângulo, então HA mede:

A) 8
C) 8,25
B) 8,2
D) 8,4
E) NRA.

175. A soma dos senos dos ângulos de um triângulo é:

p = semiperímetro
R = raio do círculo inscrito.

A) $\dfrac{p}{R}$

B) $\dfrac{2p}{R}$

C) $\dfrac{p}{2R}$

D) $\dfrac{2R}{p}$

E) NRA.

176. Os lados de um triângulo ABC são a, b e c. O valor de

$$\frac{\cos \widehat{A}}{a} + \frac{\cos \widehat{B}}{b} + \frac{\cos \widehat{C}}{c} \quad \text{é:}$$

A) $a^2 + b^2 + c^2$

B) $\dfrac{1}{a + b + c}$

C) $\dfrac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

D) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

E) NRA.

177. Um trângulo ABC tem lados a, b e c. Se $\widehat{B} + 2\widehat{A}$, então:

A) $\text{sen}\, \widehat{B} = 2\, \text{sen}\, \widehat{A}$

B) $\text{sen}\, \widehat{A} = \dfrac{a}{b + c}$

C) $\cos \widehat{A} = \dfrac{b}{2a}$

D) $\text{sen}\, \widehat{C} = \text{sen}\, \widehat{A} + \text{sen}\, \widehat{B}$

E) NRA.

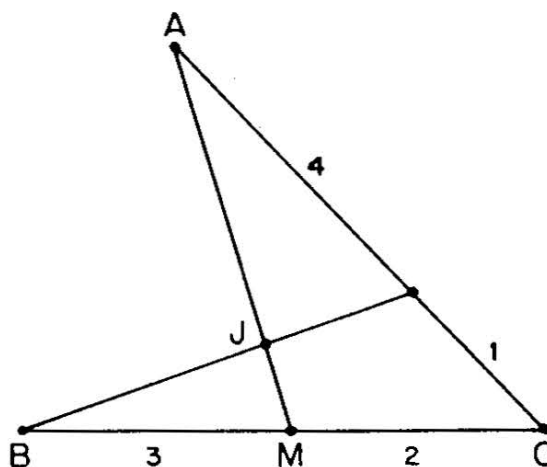
178. Na figura abaixo, $\dfrac{JA}{JM}$ vale:

A) 4

B) 5

C) $\dfrac{16}{3}$

D) $\dfrac{20}{3}$

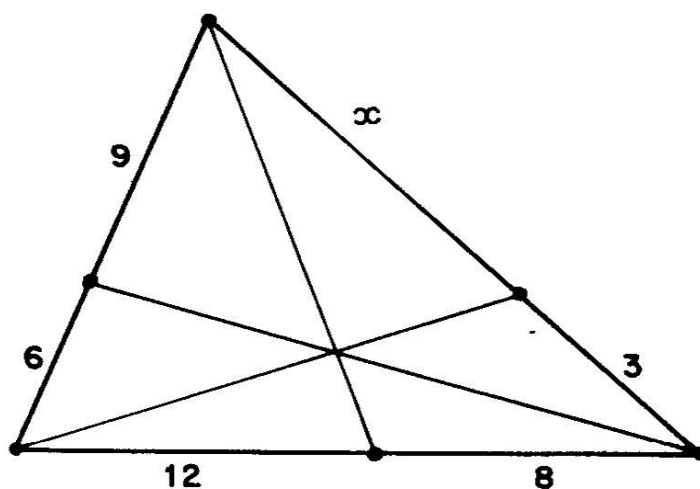
E) NRA.

179. Calcule x na figura.

A) 6

B) 6,5

C) 6,75

D) 9

E) NRA.

180. Calcule x na figura, sendo:

$AB = 6$

$AC = 8$

$BC = 10$

$MA = 6$

$NA = 2$

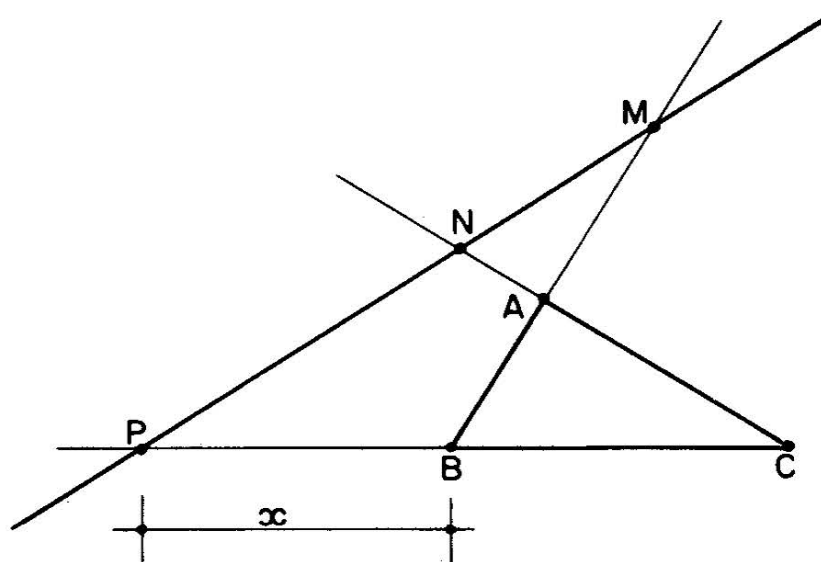
$PB = x$

A) 10

B) $\frac{20}{3}$

C) $\frac{25}{3}$

D) 15

E) NRA.

181. Na figura abaixo,

$A'C = \frac{1}{3} BC,$

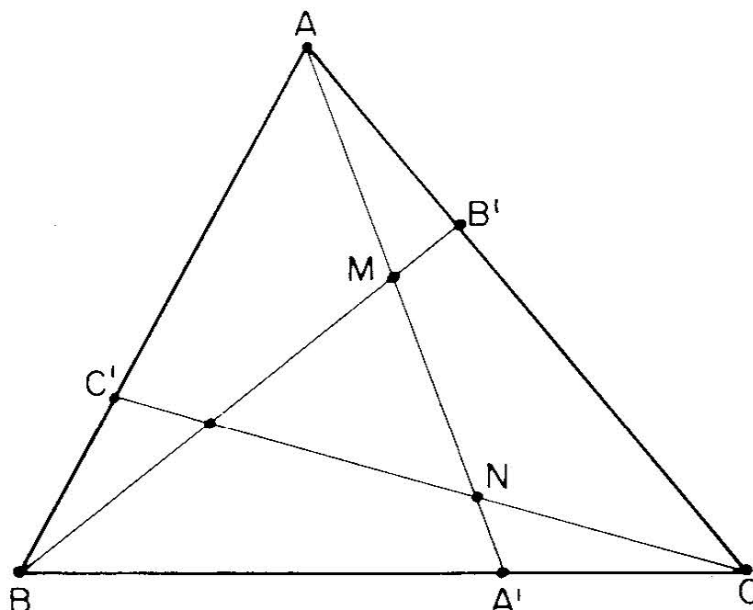
$B'A = \frac{1}{3} CA$ e

$C'B = \frac{1}{3} AB.$

A razão $\frac{MN}{AA'}$ é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{5}{9}$

182. Se G é o baricentro de um triângulo ABC, demonstre que

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

183. Dado um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e um ponto D qualquer de sua base, prove que

$$AB^2 - AD^2 + BD \cdot DC.$$

184. Determine o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante e igual a k^2.

185. Seja ABCD um retângulo. Prove que para um ponto P qualquer

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

186. Seja ABCD um retângulo de centro O. Prove que, se um ponto P varia sobre um círculo de centro O,

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

permanece constante.

187. São dados dois círculos concêntricos. De um ponto P variável do círculo exterior traçam-se $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, sendo A e B extremos de um diâmetro do círculo interior. Mostre que $PA^2 + PB^2$ é constante.

188. Determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $PA^2 + 3PB^2 = k^2$, k constante.

189. Sendo M e N os pontos que dividem em três segmentos congruentes a hipotenusa $\overline{BC}$ de um triângulo retângulo ABC, demonstre que

$$AM^2 + AN^2 + MN^2 = \frac{2}{3} BC^2.$$

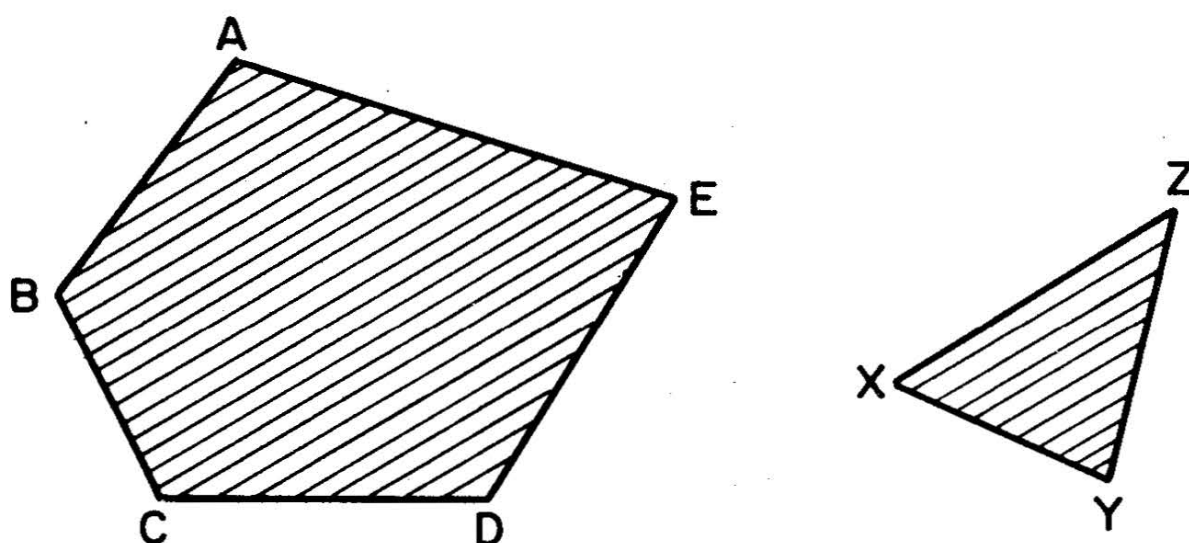
190. Determinar o lugar geométrico dos pontos cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos A e B é constante e igual a k^2.

CAPÍTULO 6

ÁREAS

INTRODUÇÃO

6.1 — DEFINIÇÕES

Estudamos até agora nas figuras geométricas a sua forma, as medidas de seus ângulos e os comprimentos dos segmentos que as compõem, assim como relações entre eles. Vamos agora estudar a extensão* das superfícies limitadas pelas figuras. Na figura abaixo, notamos que a *superfície* do pentágono ABCDE é claramente maior que a do triângulo XYZ.

Duas figuras se chamam EQUIVALENTES se possuem igual extensão, independente de suas formas. Imagine o leitor que, depois de recortarmos em uma mesma folha de papel duas figuras quaisquer

* A extensão é um conceito primitivo.

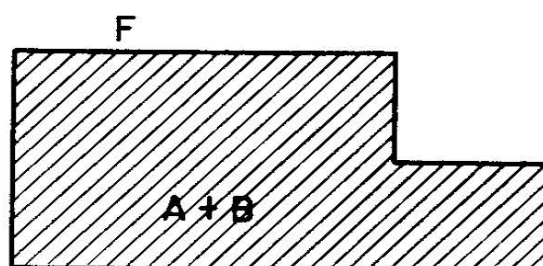
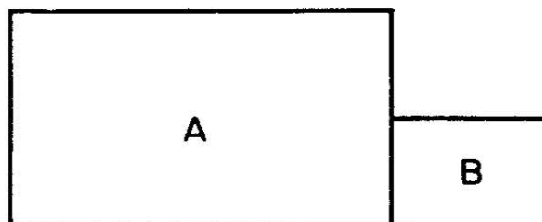
A e B, vamos pesá-las em uma balança de precisão. Se encontrarmos pesos iguais, é porque a extensão de suas superfícies é a mesma, sendo as figuras, portanto, equivalentes. Escreveremos, neste caso,

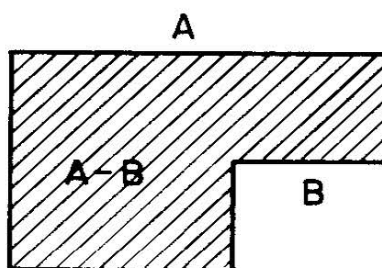
$$A \approx B.$$

Se o peso de A for maior que o de B, então a superfície de A é maior que a de B e escreveremos

$$A > B.$$

Sejam A e B duas figuras tais que sua interseção seja vazia ou sejam apenas pontos de seus contornos. A reunião de suas superfícies se chama *soma* das referidas figuras. Assim,

$$F = A + B.$$

Se B está contida em A, definiremos *diferença* entre estas figuras a superfície formada pelos pontos de A que não pertencem a B. Se A e B são os retângulos da figura ao lado, e F é a figura hachurada, então

$$F = A - B.$$

6.2 — AXIOMAS

A 1 — Duas figuras congruentes são equivalentes

$$A \equiv B \implies A \approx B.$$

A 2 — A equivalência goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

i) $A \approx A$

ii) $A \approx B \iff B \approx A$

iii) $\left.\begin{array}{l} A \approx B \\ B \approx C \end{array}\right\} \implies A \approx C.$

A 3 — As somas (ou diferenças) de figuras equivalentes são equivalentes.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \approx A_2 \\ B_1 \approx B_2 \end{array}\right\} \implies A_1 + B_1 \approx A_2 + B_2$$

6.3 — TEOREMA

Se duas figuras podem ser divididas em igual número de outras respectivamente congruentes, então são equivalentes.

Realmente, se F_1 pode ser dividida nas partes A_1, B_1, C_1 .... e se F_2 pode ser dividida nas partes A_2, B_2, C_2........, e se

$$A_1 \equiv A_2$$

$$B_1 \equiv B_2$$

$$C_1 \equiv C_2$$

....

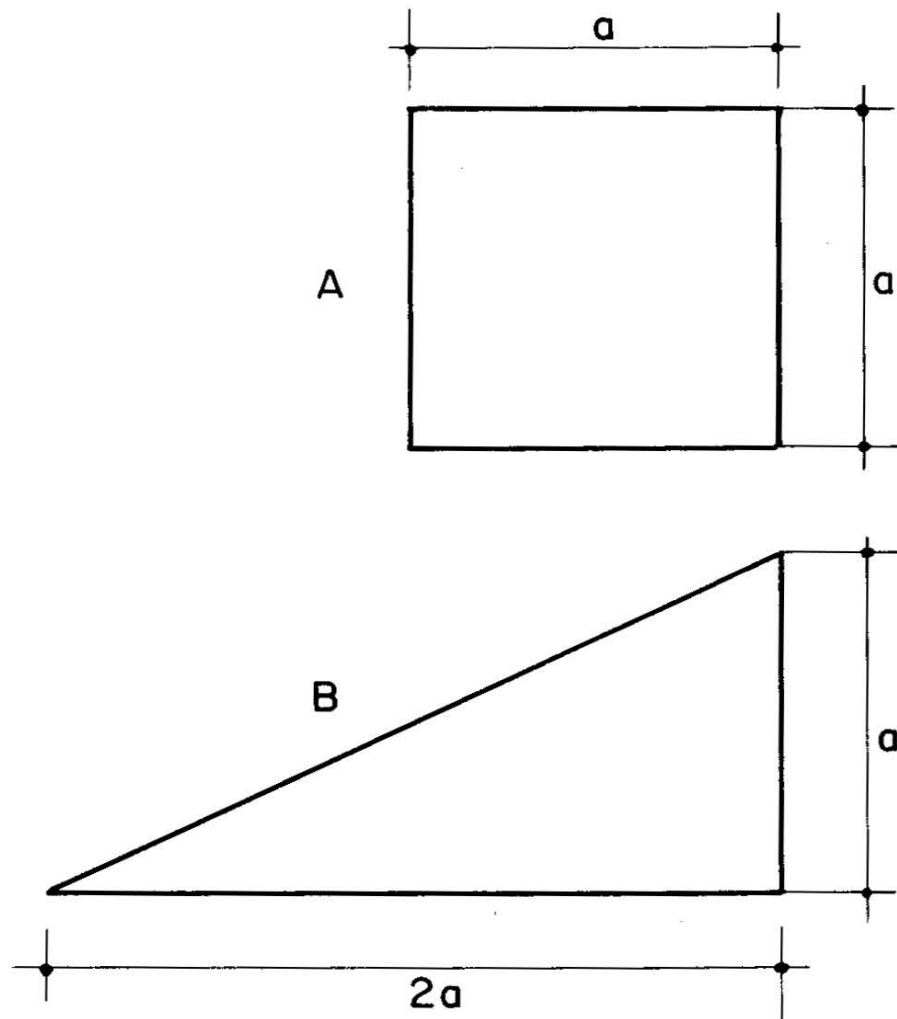
.... temos

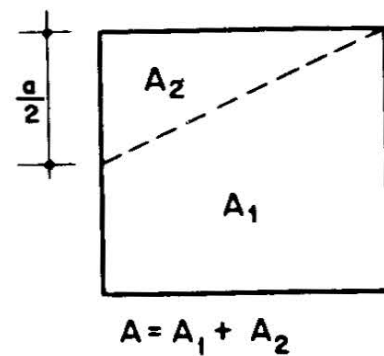
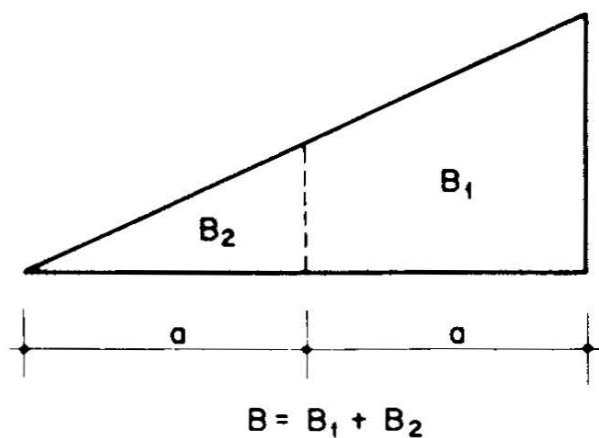
como $F_1 = A_1 + B_1 + C_1 + \ldots\ldots$ e

$$F_2 = A_2 + B_2 + C_2 + \ldots\ldots$$

por 7.2 — A1 e A3 concluímos que

$$F_1 \approx F_2$$

Exemplo

Sejam A um quadrado de lado *a* e B um triângulo retângulo de catetos *a* e $2a$.

Dividamos o quadrado em duas partes A_1 e A_2, como mostra a figura.

Dividamos também o triângulo em duas partes B_1 e B_2, como mostra a figura.

Verificamos imediatamente que:

$$A_1 \equiv B_1 \quad \text{e}$$

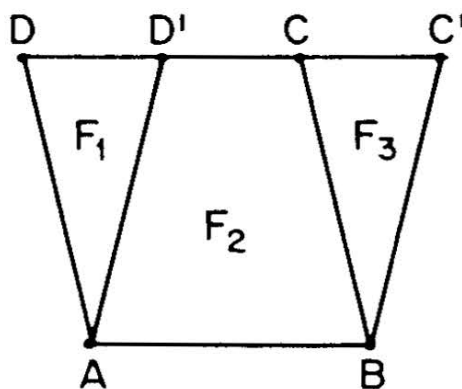
$$A_2 \equiv B_2$$

Logo, podemos concluir que

$$A \approx B.$$

6.4 — TEOREMA

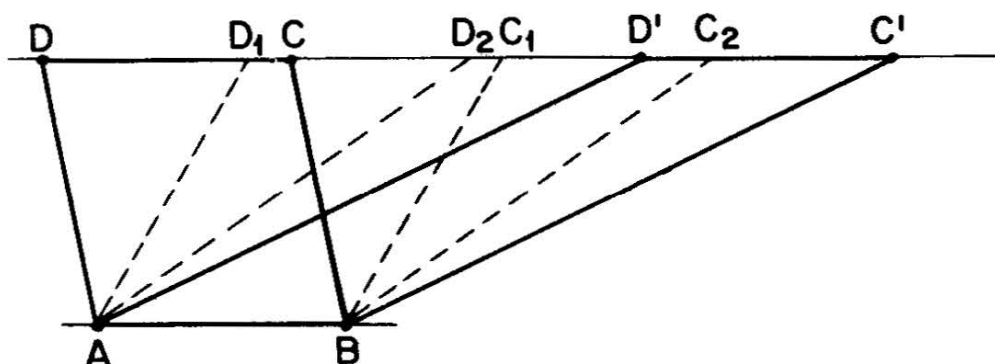
Dois paralelogramos de bases e alturas congruentes são equivalentes.

1.° caso — $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ têm um segmento ou um ponto comum

$ABCD = F_1 + F_2$

$ABC'D' = F_2 + F_3$

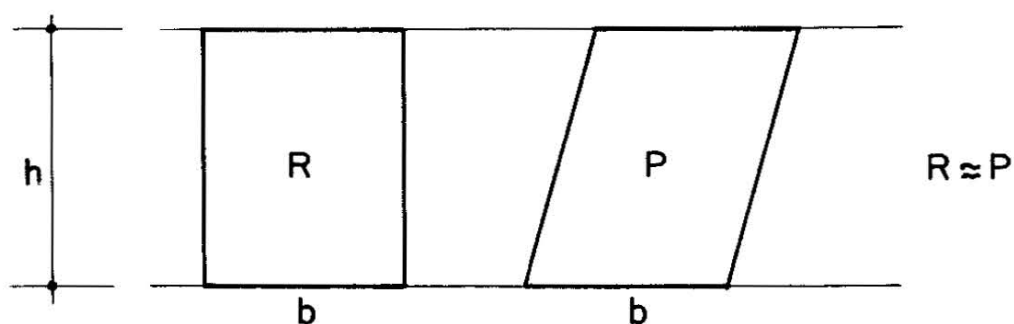
Como $F_1 \approx F_2$ e $F_1 \approx F_3$,

$ABCD \approx ABC'D'$

2.° caso — $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ não têm ponto comum.

Considerando tantos paralelogramos intermediários quantos necessários, temos

$$ABCD \approx ABC_1D_1 \approx ABC_2D_2 \approx ABC'D'$$

6.5 — OBSERVAÇÃO

Em vista do demonstrado em 7.5, podemos afirmar que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e altura.

6.6 — ÁREA DE UMA FIGURA

Vamos associar a toda superfície limitada um número real positivo ou nulo

$$A \longmapsto S(A)$$

Assim, a uma figura A foi associado um número S(A) (área de A) tal que:

1) Duas figuras equivalentes possuem áreas iguais

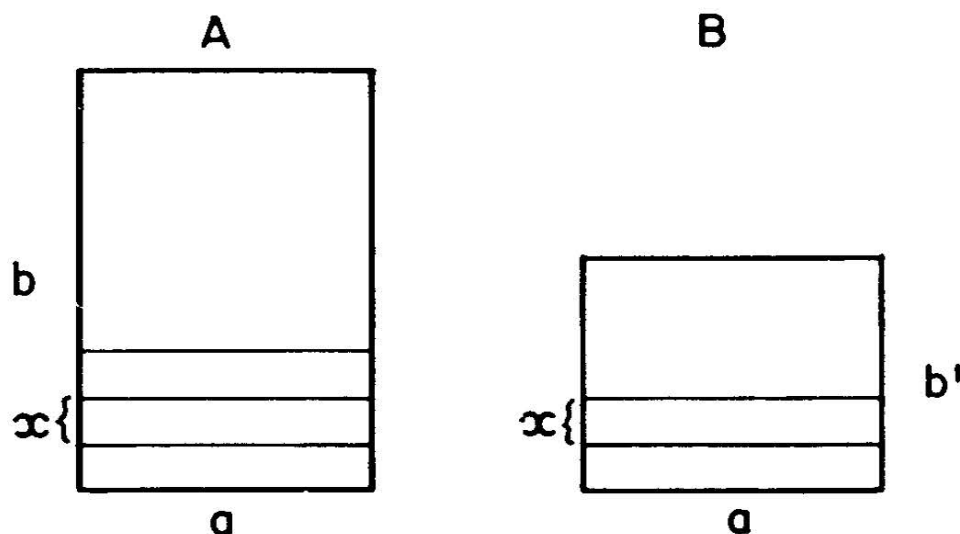
$$A \approx B \implies S(A) = S(B)$$

2) A área de uma figura composta de várias partes é a soma das áreas dessas partes.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots \implies$$

$$\implies S(A) = S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \ldots$$

6.7 — TEOREMA

A razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes é a razão entre suas alturas

Sejam b e b′ comensuráveis. Logo, existe um número x que "cabe" um número inteiro de vezes em b e em b′. Temos então

$$\begin{array}{l} b = mx \\ b' = hx \end{array} \implies \frac{b}{b'} = \frac{m}{n} \qquad (I)$$

Podemos, então, dividir A e B em retângulos congruentes de base a e altura x. Se s é a área de cada um deles, temos

$$\begin{aligned} S(A) &= ms \\ S(B) &= ns \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{S(A)}{S(B)} = \frac{m}{n} \qquad (II)$$

Por I e II, temos

$$\boxed{\frac{S(A)}{S(B)} = \frac{b}{b'}}$$

Se b e b' não forem comensuráveis, chegaremos a idêntico resultado, pois x pode ser tão pequeno quanto se queira. Assim, podemos dizer que

"A razão entre as áreas de dois retângulos que possuem uma dimensão congruente é a razão entre as dimensões não congruentes."

6.8 — TEOREMA

A razão entre as áreas de dois retângulos é a razão entre os produtos de suas dimensões.

Sejam

retângulos	dimensões	área
A	a_1 , b_1	s (A)
B	a_2 , b_2	s (B)

consideremos

C	a_1 , b_2	s (C)

Por 7.8, podemos escrever

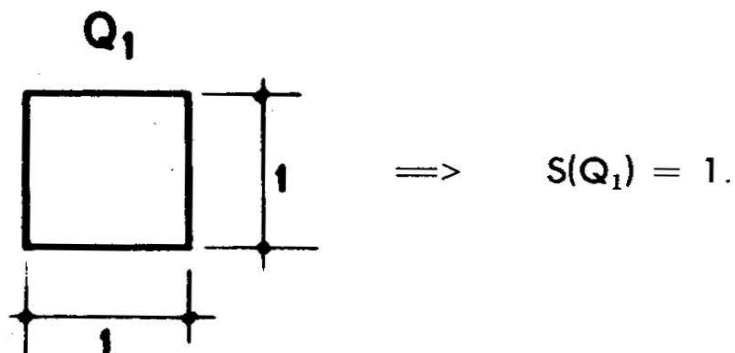
$$\frac{S(A)}{S(C)} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{S(C)}{S(B)} = \frac{a_1}{a_2}$$ Multiplicando,

$$\frac{S(A)}{S(C)} \cdot \frac{S(C)}{S(B)} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{S(A)}{S(B)} = \frac{a_1\, b_1}{a_2\, b_2}}$$

6.9 — UNIDADE DE ÁREA

Devemos considerar a superfície de extensão unitária. Esta é arbitrária, como acontece com qualquer unidade. Consideraremos, então, como nossa unidade de área a área do quadrado de lado unitário

$\Longrightarrow \quad S(Q_1) = 1.$

6.10 — ÁREA DO RETÂNGULO

Sejam

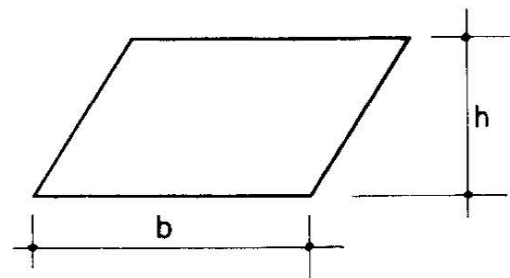
retângulos	dimensões	área
R	a , b	s
Q_1	1 , 1	1

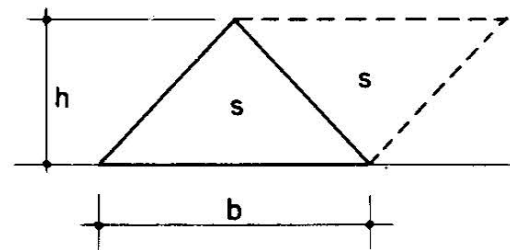
Por 7.9, temos

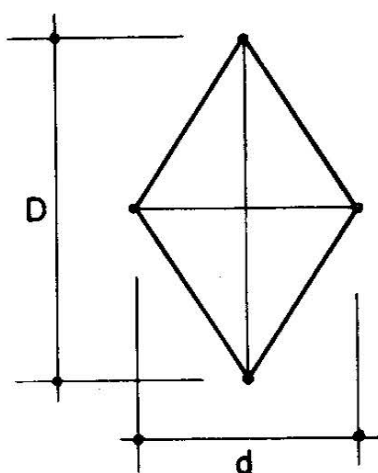
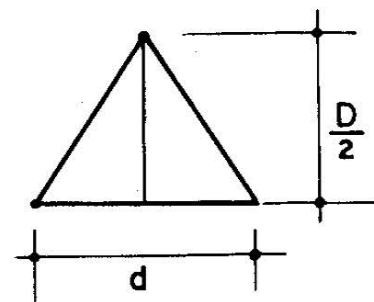
$$\frac{S}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} \implies \boxed{S = ab}$$

6.11 — ÁREA DO PARALELOGRAMO

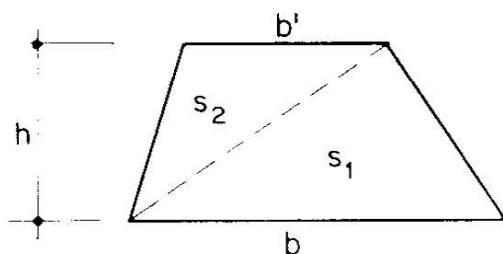
Consideremos um paralelogramo de base *b*, altura *h* e área S. Tendo em vista o demonstrado em 7.5 e 7.6, concluímos

$$\boxed{S = b \cdot h}$$

6.12 — ÁREA DO TRIÂNGULO

Consideremos um paralelogramo de base *b*, altura *h* e área 2*S*, e o triângulo formado por dois lados consecutivos e uma diagonal, como mostra a figura. Naturalmente que *S* é a área de cada um dos triângulos congruentes em que o paralelogramo ficou dividido. Assim,

$$2S = bh \implies \boxed{S = \frac{bh}{2}}$$

6.13 — ÁREA DO LOSANGO

= 2 x

Seja S a área de um losango de diagonais D e d. Temos então

$$S = 2\,\frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \implies \boxed{S = \frac{D \cdot d}{2}}$$

6.14 — ÁREA DO TRAPÉZIO

Seja S a área de um trapézio de bases b e b' e altura h. Por meio de uma diagonal, dividimos o trapézio em dois triângulos de áreas S_1 e S_2. Então,

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{bh}{2} + \frac{b'h}{2} \implies \boxed{S = \frac{b + b'}{2} \cdot h}$$

ou simplesmente $\implies$ $\boxed{S = b_m \cdot h}$

6.15 — ÁREA DO POLÍGONO REGULAR

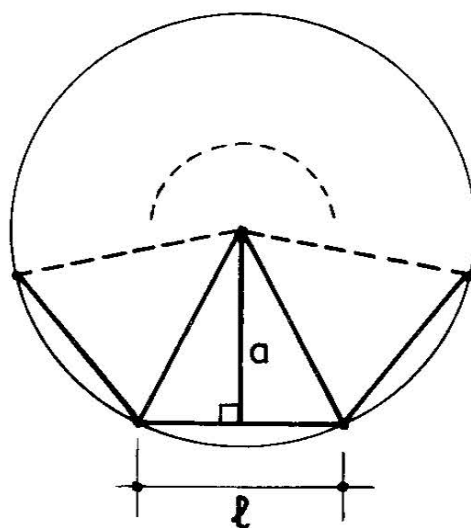
Sejam

S = área do polígono regular

l = medida do lado

a = medida do apótema

n = número de lados

p = semiperímetro do polígono

Como o polígono pode ser dividido em *n* triângulos congruentes de base *l* e altura *a*, temos

$$S' = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}.$$

Mas $n \cdot l$ é o perímetro do polígono; logo,

$$S = \frac{2p \cdot a}{2} \implies \boxed{S = pa}$$

6.16 — ÁREA DO CÍRCULO

Seja S a área de um círculo de raio R e seja S_P a área de um polígono regular de *n* lados nele inscrito.

$$\text{Se } n \to \infty, \text{ então } \begin{cases} P \to \pi R^* \\ a \to R \\ S_P \to S \end{cases}$$

Assim,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_P = \lim_{n \to \infty} pa = \pi R \cdot R = \pi R^2.$$ Então,

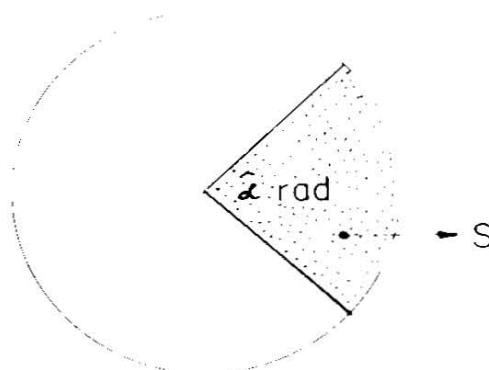
$$\boxed{S = \pi R^2}$$

6.17 — ÁREA DE UM SETOR CIRCULAR

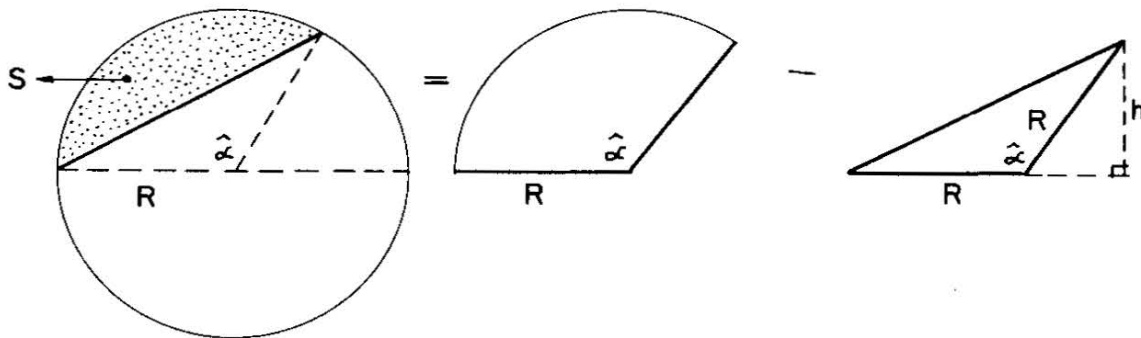
Como a área do setor varia linearmente com o ângulo central,

$S = m\widehat{\alpha}$. Mas

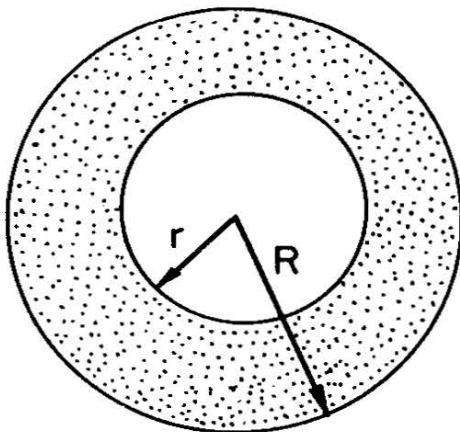
se $\widehat{\alpha} = 2\pi$ rd, $S = \pi R^2$. Logo,

$$\pi R^2 = m\, 2\pi \implies m = \frac{R^2}{2}.$$

* O comprimento do círculo é dado em função do raio por $C = 2\pi R$, onde π é uma constante aproximadamente igual a 3,1416.

Assim, $\boxed{S = \dfrac{\widehat{\alpha}\, R^2}{2}}$

6.18 — ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

$$S = \frac{\widehat{\alpha}\, R^2}{2} - \frac{R \,.\, R \text{ sen } \widehat{\alpha}}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \frac{R^2}{2} (\widehat{\alpha} = \text{sen } \widehat{\alpha})} \quad \widehat{\alpha} \text{ em rd.}$$

6.19 — ÁREA DA COROA CIRCULAR

$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S = \pi (R^2 - r^2)}$$

6.20 — ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS LADOS

Consideremos um triângulo de área S, lados *a*, *b* e *c* e alturas h_a, h_b, h_c.

$$S = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S} \quad \text{I}$$

Sabemos que

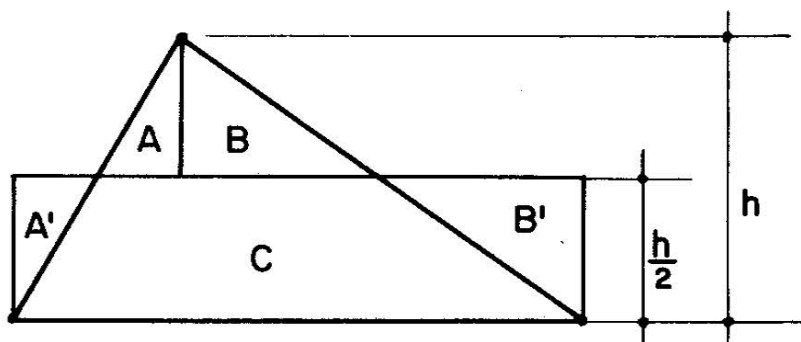
$h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo p seu semiperímetro.

Multiplicando por $\dfrac{a}{2}$ vem

$$\frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \;*$$

6.21 — TEOREMA

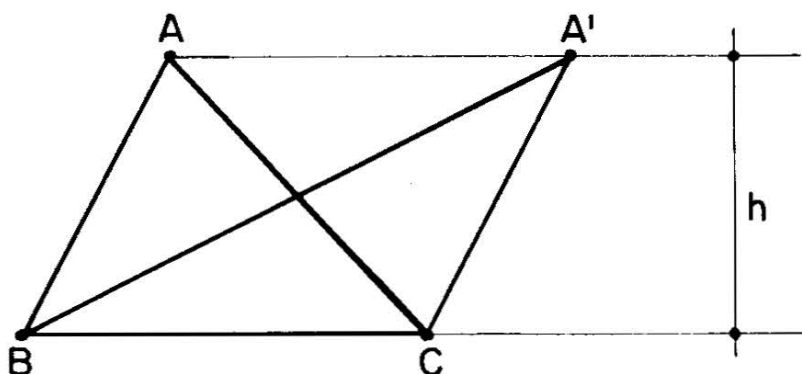
Um triângulo é equivalente a um retângulo de mesma base que a do triângulo e altura igual à metade da do triângulo.

* Este radical é conhecido como "radical de Heron". Heron — séc. I d.C.

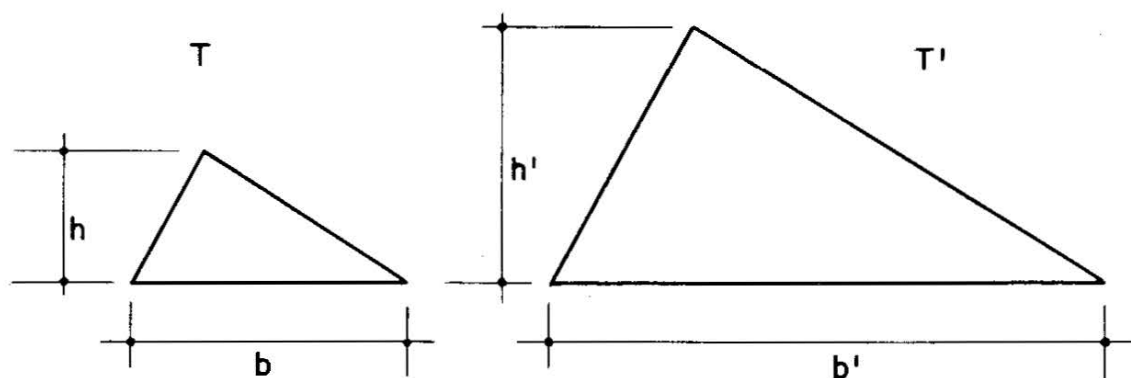
$$T = A + B + C$$

$$R = A' + B' + C \qquad \text{mas}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \approx A' \\ B \approx B' \\ C \approx C \end{array}\right\} \Longrightarrow T \approx R$$

Daí concluímos que

Dois triângulos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes

S (ABC) = S (A'BC)

6.22 — RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Sejam $S(T) = S$

$S(T') = S'$

Se $T \sim T'$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{h}{h'} = k$ (razão de semelhança).

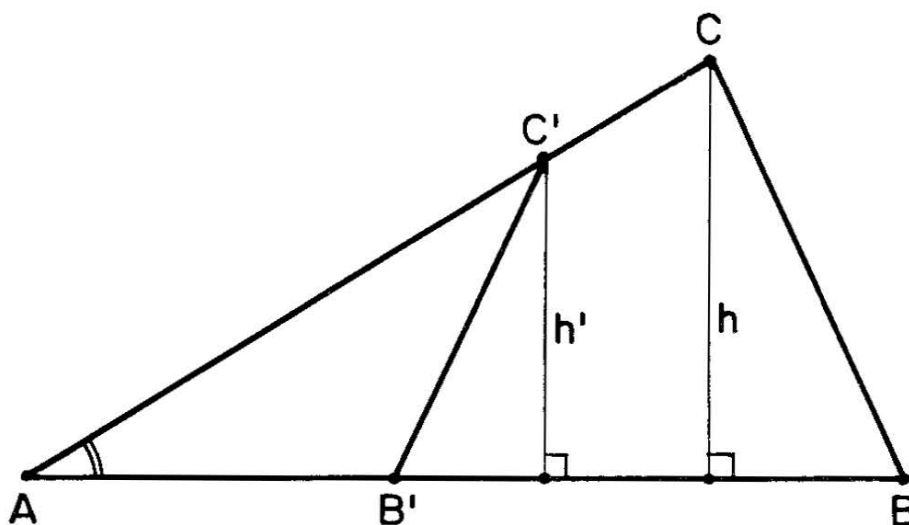
Então,

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}\, b\, h}{\frac{1}{2}\, b'\, h'} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

Portanto, a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Estendemos facilmente esta conclusão para polígonos e demais figuras semelhantes.

6.23 — RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS QUE POSSUEM UM ÂNGULO COMUM

Consideremos os triângulos ABC e AB'C' da figura que possuem o ângulo $\hat{A}$ em comum. Sejam S e S' suas áreas e h e h' as alturas traçadas de C e C', respectivamente. Temos então

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} \qquad S' = \frac{AB' \cdot h'}{2}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{h}{h'}$$

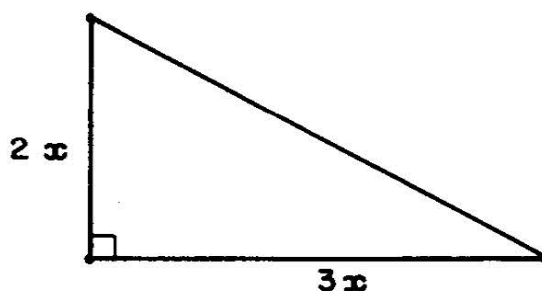
Mas $\frac{h}{h'} = \frac{AC}{AC'}$. Logo,

$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}}$$

A razão entre as áreas de dois triângulos que possuem um ângulo comum é a razão entre os produtos dos lados que em cada triângulo formam esse ângulo.

6.24 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

101. Calcule os catetos de um triângulo retângulo de área igual a 108 ua* sabendo que são proporcionais a 2 e 3.

Solução

$$108 = \frac{2x \cdot 3x}{2} \Longrightarrow$$

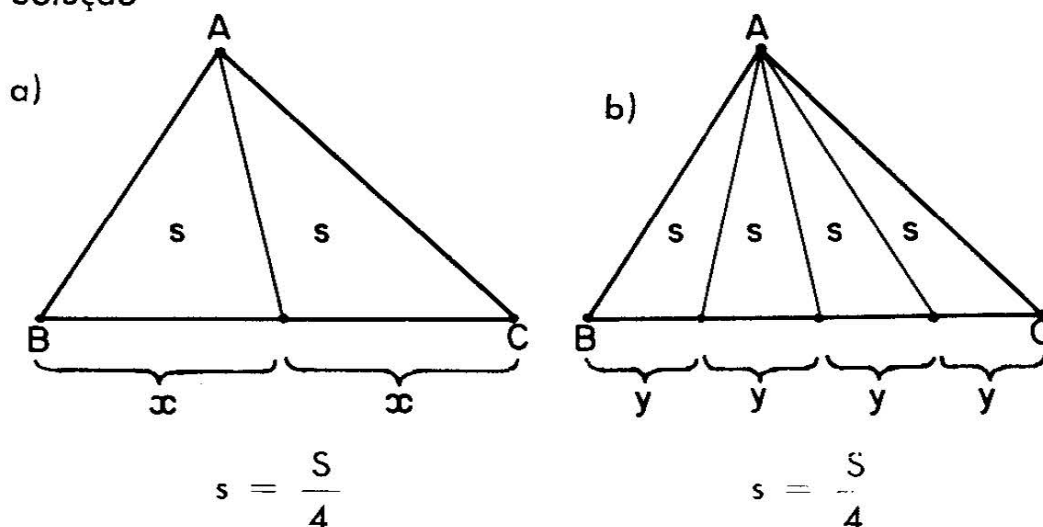
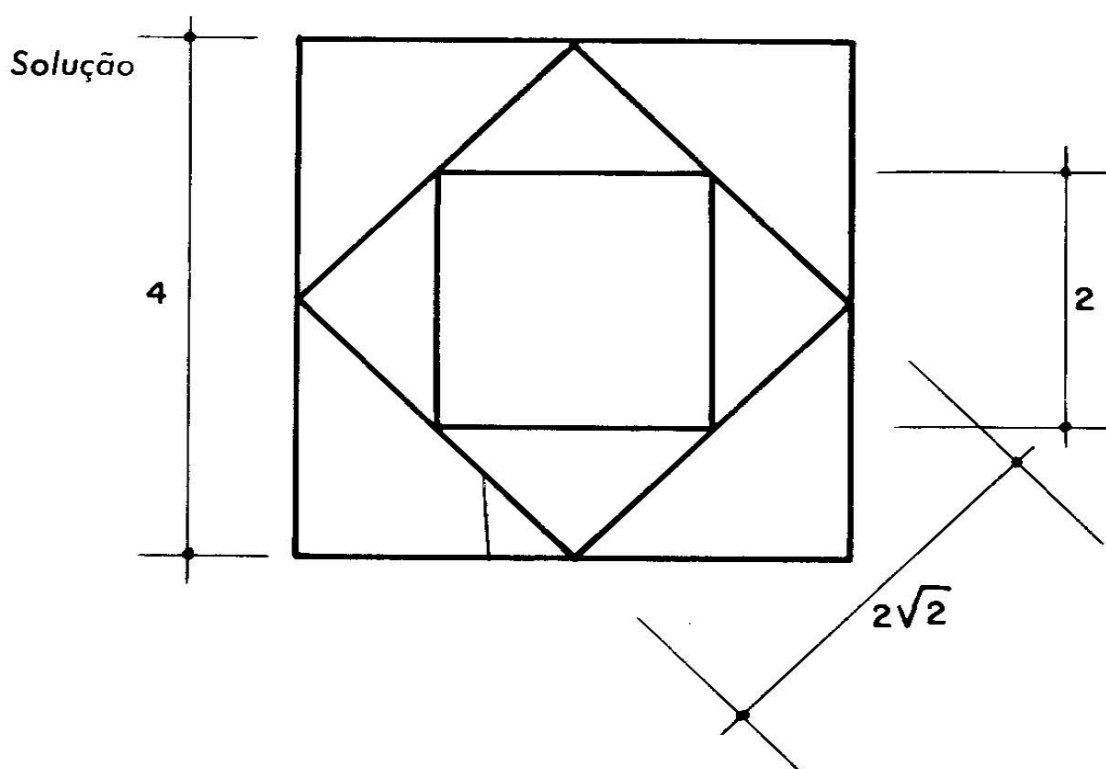
$$\Longrightarrow x^2 = 36 \Longrightarrow x = 6.$$

Resposta: 12 e 18.

* Unidades de área.

192. Dividir um triângulo ABC

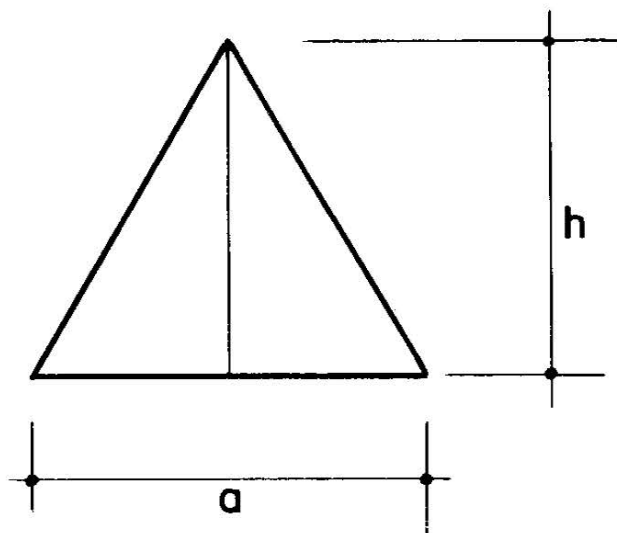
a) em duas partes equivalentes por uma ceviana
b) em quatro partes equivalentes por meio de três cevianas.

Solução

193. Considere um quadrado de lado a, um segundo quadrado cujos vértices são os pontos médios do primeiro, um terceiro formado pelos pontos médios do segundo e assim sucessivamente. Calcule o limite da soma das áreas dos quadrados.

Solução

lados	áreas
4	16
$2\sqrt{2}$	8
2	4
$\vdots$	$\vdots$

$$\lim S = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$$

Resposta: 32 ua

194. Calcule a área de um triângulo eqüilátero de lado a.

Solução

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{ah}{2} \implies$$

$$S = \frac{a\,\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

195. Sendo eqüilátero o triângulo da figura, calcule a área assinalada.

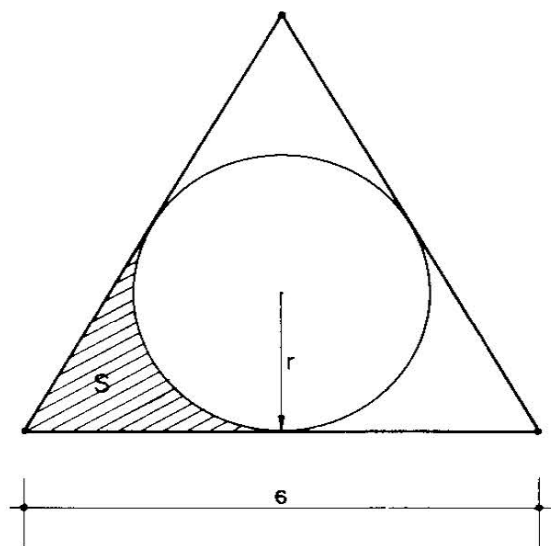
Solução

$$S = \frac{\triangle - \bigcirc}{3}$$

$$S_{\triangle} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\,\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\bigcirc} = \pi r^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

$$S = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{3} = 3\sqrt{3} - \pi$$

Resposta: $3\sqrt{3} - \pi$ ua

196. Calcule a área de um losango de perímetro 40 sabendo que uma diagonal é o dobro da outra.

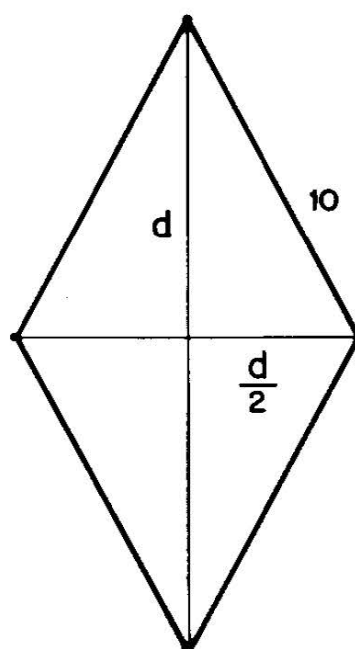
Solução

$$D = 2d$$

$$S = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2$$

$$100 = d^2 + \frac{d^2}{4} = \frac{5d^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad d^2 = 80 \quad \Longrightarrow$$

$$S = 80$$

Resposta: 80

197. Um triângulo de altura h é dividido por uma reta paralela à base em duas partes equivalentes. Calcule a distância desta reta ao vértice.

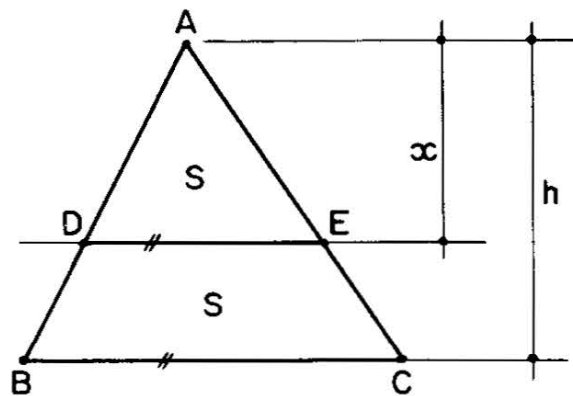
Solução

Δ ADE $\sim$ Δ ABC

razão de semelhança $k = \frac{x}{h}$. Sabemos que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança. Então,

$$\frac{S}{2S} = \frac{x^2}{h^2}$$

$$x^2 = \frac{h^2}{2} \implies x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: $\frac{h\sqrt{2}}{2}$

198. A figura abaixo mostra um quadrado e seu círculo circunscrito. Se a área assinalada é igual a $\pi - 2$, calcule o lado do quadrado.

Solução

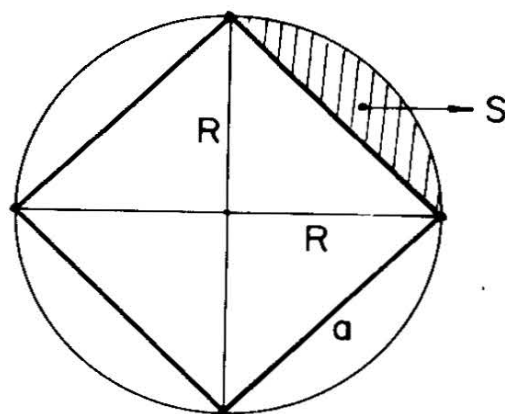
S = ◺ − ◺

$$\pi - 2 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R \cdot R}{2}$$

$$\pi - 2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) \implies$$

$$\implies R^2 = 4 \implies R = 2.$$

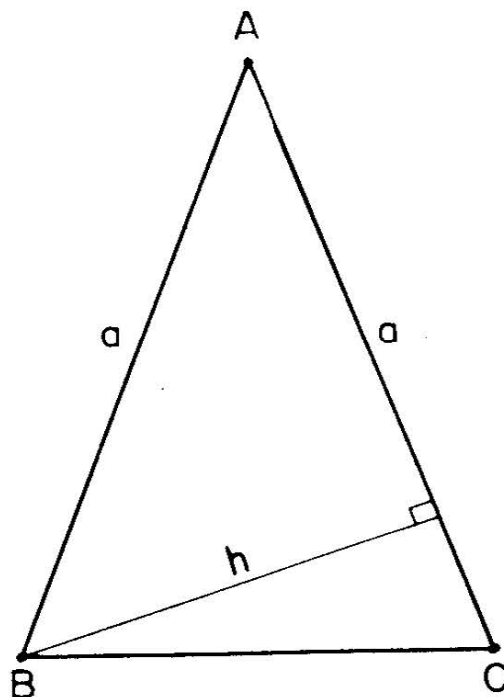
O lado do quadrado será $a = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Resposta: $2\sqrt{2}$

199. Num triângulo isósceles ABC, AB = AC = a. Calcule sua área sabendo que é máxima.

Solução

Seja h a altura relativa ao lado $\overline{AC}$. Então,

$$h = a \operatorname{sen} \widehat{A} \quad \text{e}$$

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot a \operatorname{sen} \widehat{A}}{2}$$

A área será máxima se $\operatorname{sen} \widehat{A} = 1 \implies \widehat{A} = 90°$. Então,

$$S = \frac{a^2}{2}$$

Resposta: $\frac{a^2}{2}$.

200. IME — 65.

Divida a área de um círculo de raio R em n partes equivalentes por meio de círculos concêntricos de raios $r_1, r_2, r_3, \ldots r_i \ldots r_{n-1}$. Estabelecer o valor de r_i em função de R, n e i.

Solução

A área de cada parte será

$$s = \frac{\pi R^2}{n}$$

Como o círculo r_i está dividido em *i* partes equivalentes,

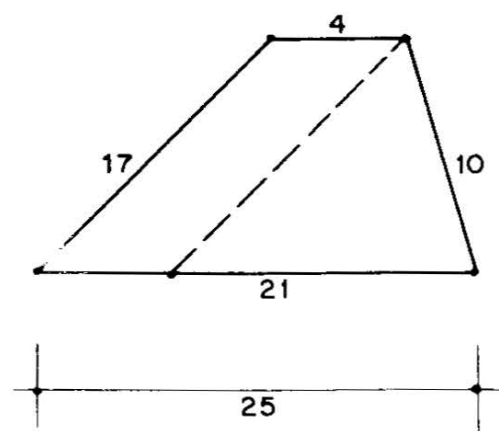
$$\pi r_i^2 = i \frac{\pi R^2}{n} \implies r_i = R\sqrt{\frac{i}{n}}$$

Resposta: $R\sqrt{\dfrac{i}{n}}$.

201. Calcule a área do trapézio de bases 25 e 4 e lados não paralelos 17 e 10.

Solução

Calculemos a altura do trapézio.

Traçando por um dos vértices da base menor uma paralela a um dos lados oblíquos, formamos um triângulo de lados 17, 10 e 21. Sua altura será:

$$\left.\begin{array}{l} a = 21 \\ b = 17 \\ c = 10 \end{array}\right\} \implies p = 24$$

$$h_a = \frac{2}{21}\sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 8$$

Então, a área do trapézio será

$$S = \frac{25 + 4}{2} \cdot 8 = 116$$

Resposta: 116 ua

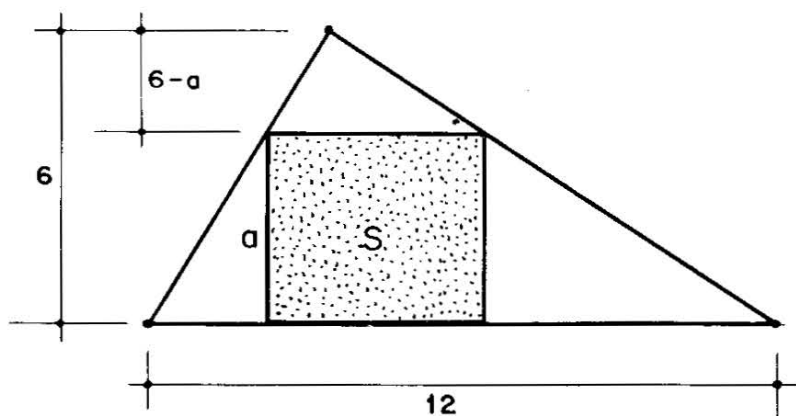
202. Calcule a área do quadrado inscrito em um triângulo de base 12 e altura 6

Solução

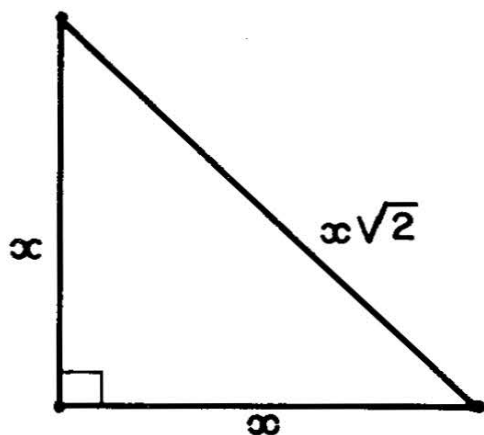
$$\frac{a}{12} = \frac{6 - a}{6} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a = 4.$$

Então,

$$S = 4^2 = 16$$

Resposta: 16 ua

203. O perímetro de um triângulo isósceles é 2p. Calcule a área desse triângulo.

Solução

$$x + x + x\sqrt{2} = 2p \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = p(2 - \sqrt{2})$$

$$S = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{p^2(2 - \sqrt{2})^2}{2}$$

$$S = p^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

Resposta: $p^2(3 - 2\sqrt{2})$.

204. Em um círculo de raio R, $\overline{AB}$ é um diâmetro e $\overline{AC}$ uma corda que forma 15° com esse diâmetro. Calcule a área do menor dos segmentos circulares determinados pela corda $\overline{AC}$.

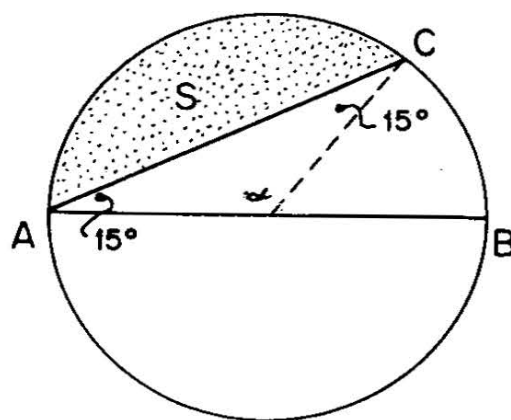
Solução

$$x = \frac{R^2}{2}(\widehat{\alpha} - \operatorname{sen}\widehat{\alpha}) \quad \text{v. 6.18}$$

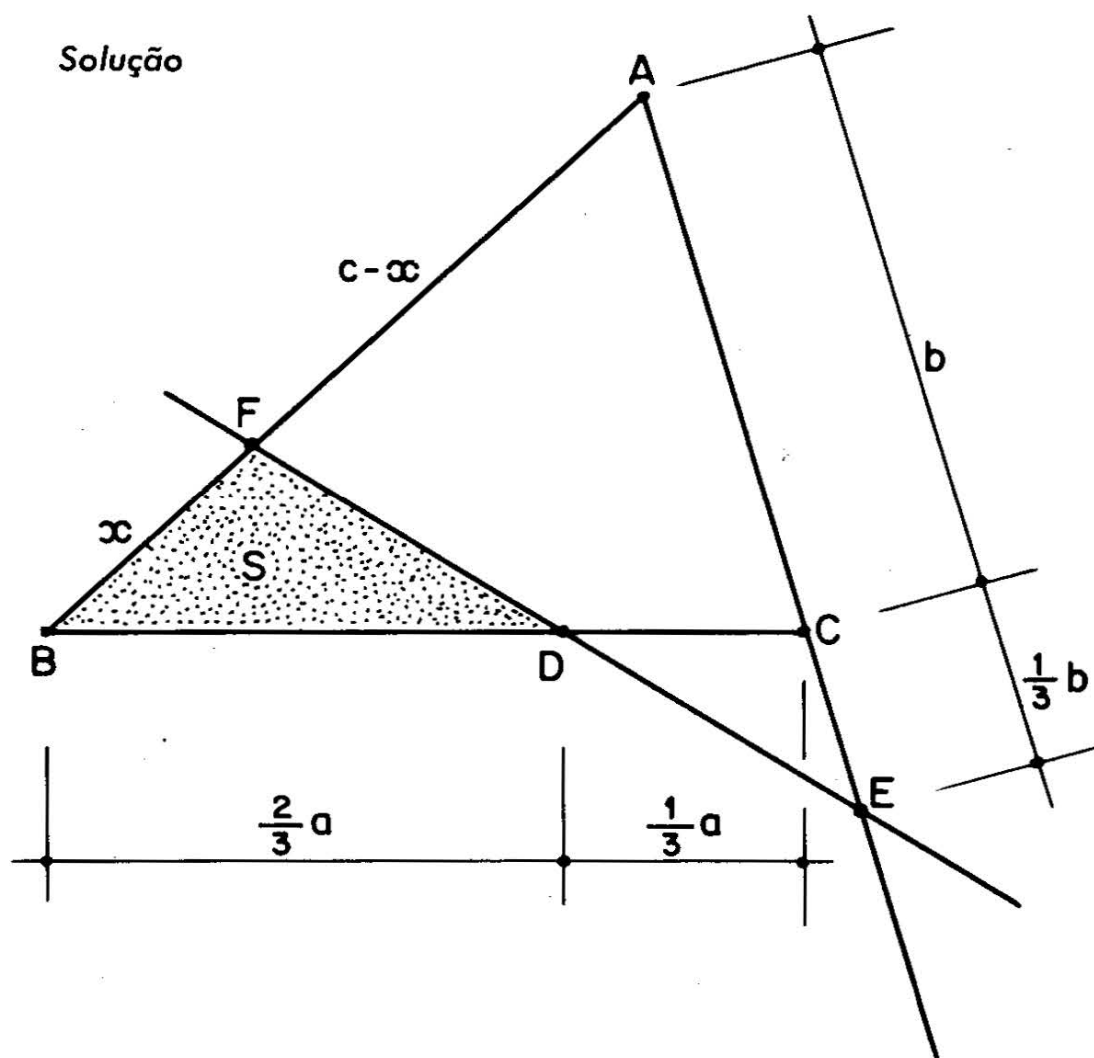
$$\widehat{\alpha} = 150° = \frac{5\pi}{6} \text{ rd}$$

$$\operatorname{sen}\widehat{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{R^2}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$S = \frac{R^2}{12}(5\pi - 3)$$

Resposta: $\frac{R^2}{12}(5\pi - 3)$.

205. O triângulo ABC de lados a, b e c da figura tem área igual a 36 ua. Se $DC = \frac{a}{3}$ e $CE = \frac{b}{3}$, calcule a área do triângulo BDF.

Solução

Pelo teorema de Menelaus,

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \implies$$

$$\implies \frac{c - x}{x} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \implies x = \frac{c}{3}$$

Como BDF e BCA têm o ângulo $\widehat{B}$ em comum,

$$\frac{S}{36} = \frac{BF \cdot BD}{BA \cdot BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \implies$$

$$\implies S = 8 \text{ ua}$$

Resposta: 8 ua

PROBLEMAS PROPOSTOS

206. Calcule a área do retângulo de perímetro igual a 14 sabendo que sua diagonal mede 5.

A) 6 C) 12

B) 8 D) 16

E) NRA.

207. Os lados de um paralelogramo medem 10 e $6\sqrt{3}$. Se esses lados formam 60°, sua área mede:

A) 90 C) 60

B) 120 D) 75

E) NRA.

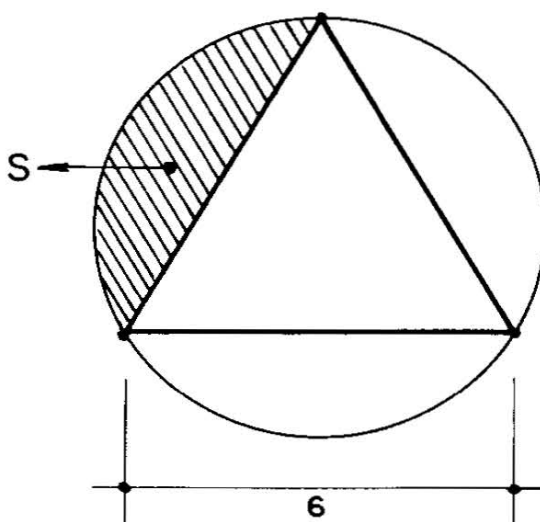
208. A figura abaixo representa um triângulo eqüilátero de lado 6 e seu círculo circunscrito. A área assinalada mede:

A) $2\pi - \sqrt{3}$

B) $3\pi - 2\sqrt{3}$

C) $4\pi - 3\sqrt{3}$

D) $12\pi - 9\sqrt{3}$

E) NRA.

209. Dois triângulos são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual a 3. A razão entre suas áreas é:

A) 3 C) 9

B) 6 D) 27

E) NRA.

210. Dois círculos de centros A e B e raios R e 4R são tangentes exteriormente. Uma reta é tangente em C e D aos dois círculos. A área do quadrilátero ABCD é:

A) $4R^2$ C) $8R^2$

B) $5R^2$ D) $10R^2$

E) NRA.

211. Calcule o perímetro de um losango em que uma diagonal mede 10 equivalente a um quadrado de lado igual a 5.

A) $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ C) $10\sqrt{5}$

B) $5\sqrt{5}$ D) $5\sqrt{10}$

E) NRA.

212. Considere dois círculos concêntricos de raios R e 2R e centro O. Considere uma corda $\overline{AB}$ do círculo maior tangente ao círculo menor. Se a área do setor AOB é $k\pi R^2$, k vale:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$

E) NRA.

213. Se o raio de um círculo é multiplicado por 2,5, a sua área fica multiplicada por:

A) 5 C) 25

B) 10 D) 125

E) NRA

214. A área de um triângulo retângulo em que um cateto mede 45 e a hipotenusa 53 é:

A) 1.260 C) 760

B) 930 D) 630

E) NRA.

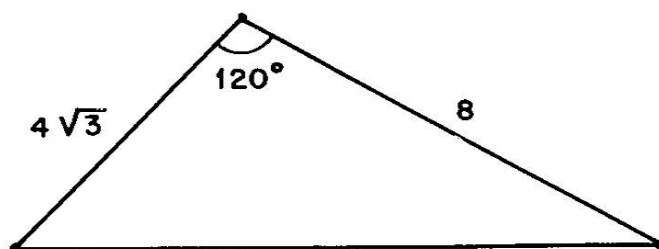
215. Em um trapézio isósceles de bases 10 e 6, as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases. A área desse trapézio é:

A) 32
B) 28
C) 24
D) 20
E) NRA.

216. O círculo inscrito em um setor de 60° e raio R tem área kR^2, nde k vale:

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{8}$
C) $\frac{3}{10}$
D) $\frac{4}{15}$
E) $\frac{1}{9}$

217. A área do triângulo da figura é:

A) 12
B) 18
C) 20
D) 30
E) NRA.

218. Um trapézio retângulo de bases 9 e 4 tem diagonais perpendiculares. Sua área é:

A 26
B) 39
C) 52
D) 78
E) NRA.

219. A área de um círculo inscrito em um triângulo eqüilátero é 36π. A altura desse triângulo mede:

A) 6
B) 12
C) 18
D) 24
E) NRA.

220. Se o raio de um círculo aumenta de 10%, sua área aumenta de:

A) 10% C) 21%

B) 20% D) 100%

E) NRA.

221. A área de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 8 é:

A) $64\sqrt{3}$ C) $84\sqrt{3}$

B) $72\sqrt{3}$ D) $96\sqrt{3}$

E) NRA.

222. Os catetos de um triângulo retângulo medem 16 e 30. A área do círculo circunscrito a esse triângulo é:

A) 174π C) 289π

B) 211π D) 316π

E) NRA.

223. O lado de certo quadrado aumenta de 30%. Sua área então aumenta de:

A) 15% C) 60%

B) 30% D) 69%

E) 27%

224. A área de um segmento circular de raio R e ângulo central de 60° é:

A) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{6}(2\pi - \sqrt{3})$

B) $\frac{R^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12}(\pi - \sqrt{3})$

E) NRA.

225. A área de um setor circular de raio R e ângulo central de 30° é:

A) $\frac{R^2}{12}(\pi - 6)$ C) $\frac{R^2}{12}(\pi - 3)$

B) $\frac{R^2}{6}(\pi - 3)$ D) $\frac{R^2}{6}(\pi - 3)$

E) NRA.

226. A razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$

E) NRA.

227. A área de um triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo de raio r é:

A) $\frac{5}{2} r^2$ C) $3\sqrt{3}\,\pi r^2$

B) $3\sqrt{3}\,r^2$ D) $\pi\sqrt{3}\,r^2$

E) NRA.

228. A razão entre as áreas dos triângulos eqüiláteros inscrito e circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{5}$

229. A razão entre as áreas de um triângulo eqüilátero inscrito e de um hexágono regular circunscrito ao mesmo círculo é:

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{3}{8}$

230. Um dos lados oblíquos de um trapézio mede a e a distância do ponto médio do lado oposto a este lado é x. A área do trapézio é:

A) $\frac{ax}{2}$

B) ax

C) $2ax$

D) indeterminado

E) NRA.

231. No quadrilátero qualquer ABCD, P é meio de $\overline{AD}$ e M é meio de $\overline{BC}$. Se a área de ABCD é 18, a área do quadrilátero APCM é:

A) 6

B) 9

C) 12

D) indeterminado

E) NRA.

232. Considere um paralelogramo ABCD de lados $AB = 12$ e $BC = 4\sqrt{3}$. Se um dos ângulos desse paralelogramo mede 60°, calcule a área do losango inscrito de forma que uma diagonal seja formada pelos pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

A) 18

B) 24

C) 30

D) 36

E) NRA.

233. Considere um trapézio de bases a e b $(a > b)$ e altura h. Calcule a área do triângulo de base a formado pelos prolongamentos dos lados não paralelos.

A) $\frac{b^2h}{a - b}$

B) $\frac{a^2h}{a - b}$

C) $\frac{a^2h}{2(a - b)}$

D) $\frac{b^2h}{a + b}$

E) NRA.

234. Seja P um ponto interior a um triângulo ABC. Se os triângulos PAB, PBC e PCA são equivalentes, então P é o:

A) circuncentro

B) incentro

C) baricentro

D) ortocentro

E) NRA.

235. Um retângulo está inscrito em um círculo de raio igual a 6. Se um de seus lados mede 9, sua área mede:

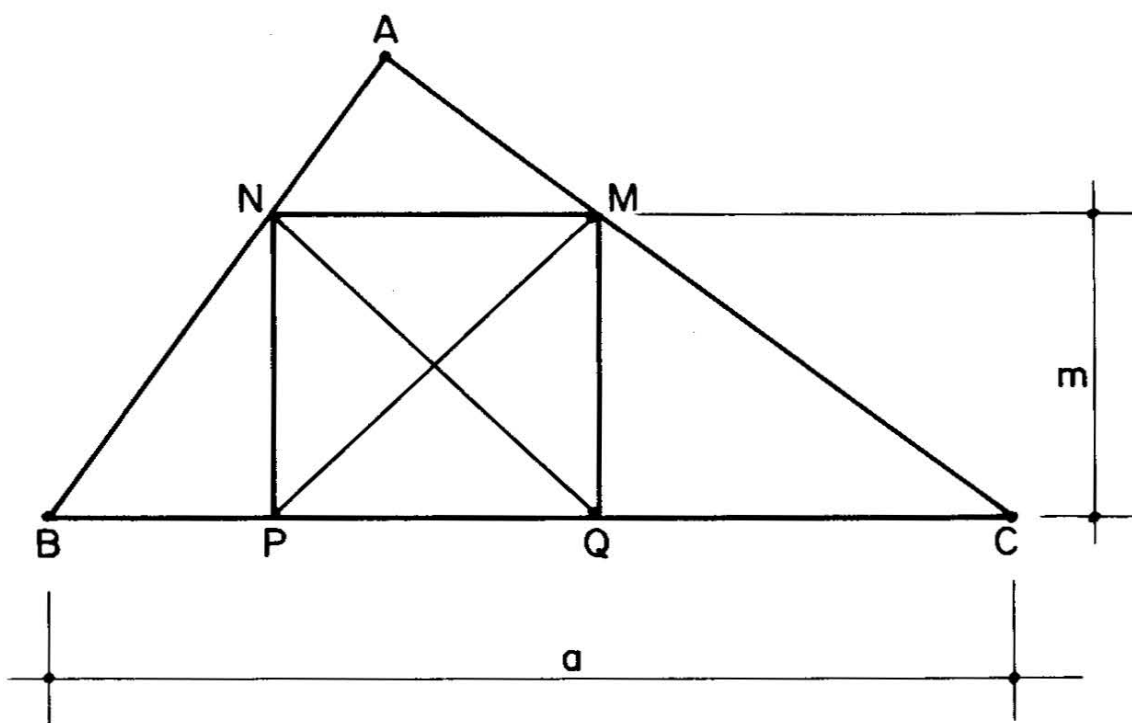
A) $7\sqrt{7}$
B) $14\sqrt{7}$
C) $21\sqrt{7}$
D) $27\sqrt{7}$
E) NRA.

236. Um triângulo ABC tem área igual a 18. Pelo baricentro do triângulo traça-se uma paralela a $\overline{BC}$ que determina em $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ os pontos M e N. A área do triângulo AMN é:

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

237. Um retângulo de área igual a 24 está inscrito em um triângulo de base 9 e altura 12. A maior dimensão que esse retângulo pode ter é:

A) 6
B) 7,5
C) 8
D) 9
E) NRA.

238. Na figura abaixo, MNPQ é um quadrado. A soma das áreas dos triângulos NQB e MPC é:

A) $m(a + m)$ C) $m(2a - m)$

B) $2m(a - m)$ D) $\frac{m}{2}(a + m)$

E) NRA.

239. Em um losango de área igual a 12, a distância entre dois lados opostos é 4. O perímetro desse losango é:

A) 24 C) 30

B) 26 D) 36

E) NRA.

ENUNCIADO PARA AS QUESTÕES 240 A 245

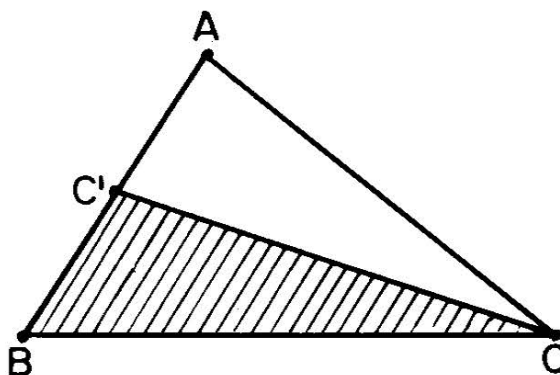
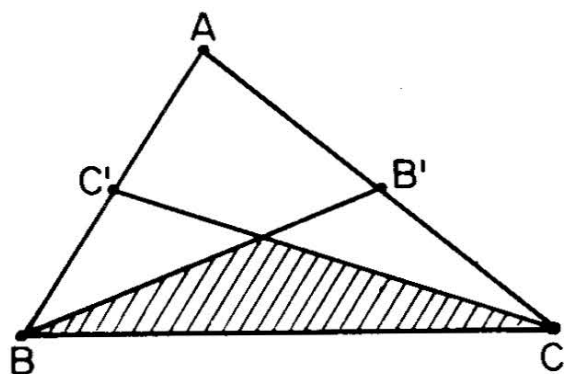
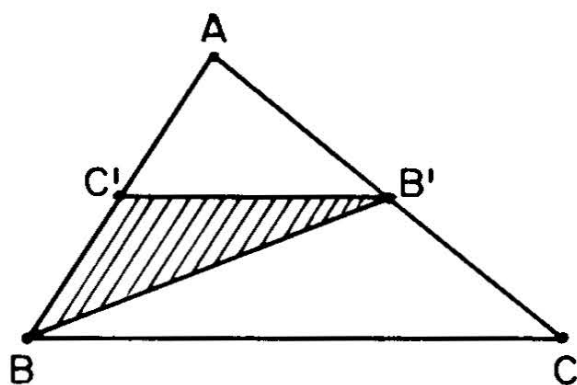
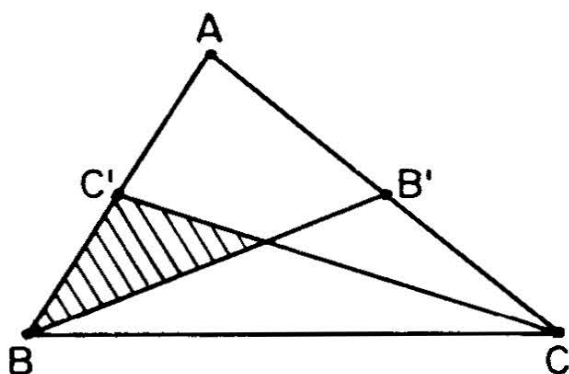
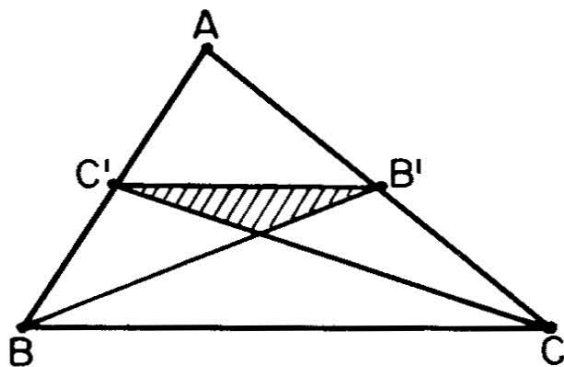
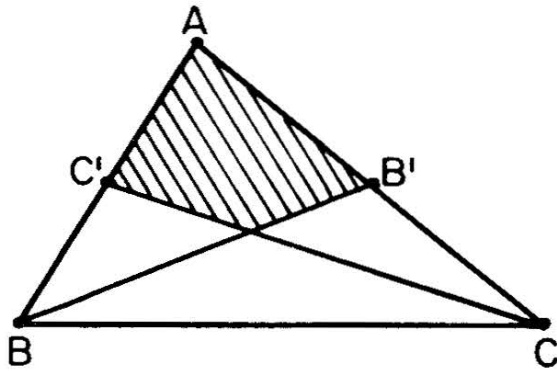
Nas figuras 240 a 245 o triângulo ABC tem área S, sendo $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ medianas. Calcule a área assinalada.

OPÇÕES PARA AS QUESTÕES 240 A 245

A) $\frac{S}{2}$ C) $\frac{S}{4}$

B) $\frac{S}{3}$ D) $\frac{S}{6}$

E) $\frac{S}{12}$

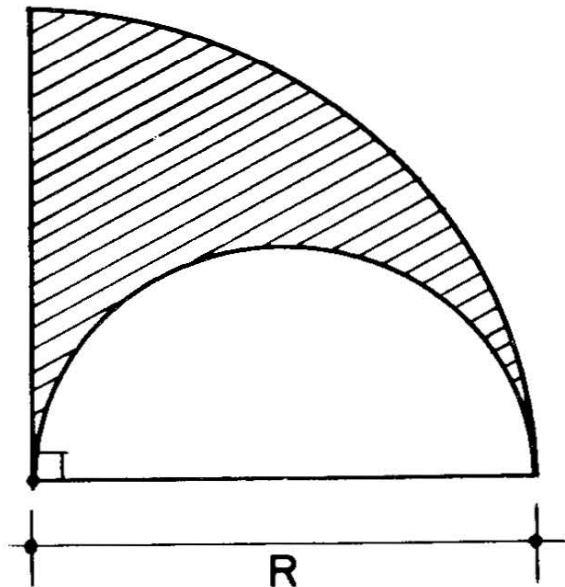
240.

241.

242.

243.

244.

245.

246. Calcule a área assinalada.

A) $\frac{\pi R^2}{4}$

B) $\frac{\pi R^2}{8}$

C) $\frac{\pi R^2}{16}$

D) $\frac{\pi R^2}{32}$

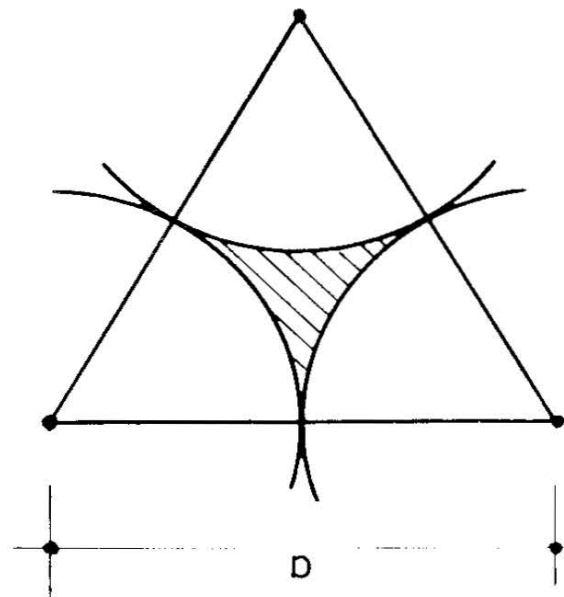
E) NRA.

247. Considere um triângulo eqüilátero de lado a onde foram traçados três círculos de raios $\frac{a}{2}$, com centro nos vértices. Calcule a área exterior aos círculos e interior ao triângulo eqüilátero.

A) $\frac{a^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$

B) $\frac{a^2}{4}(\pi - \sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{4}(2\sqrt{3} - \pi)$

D) $\frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi)$

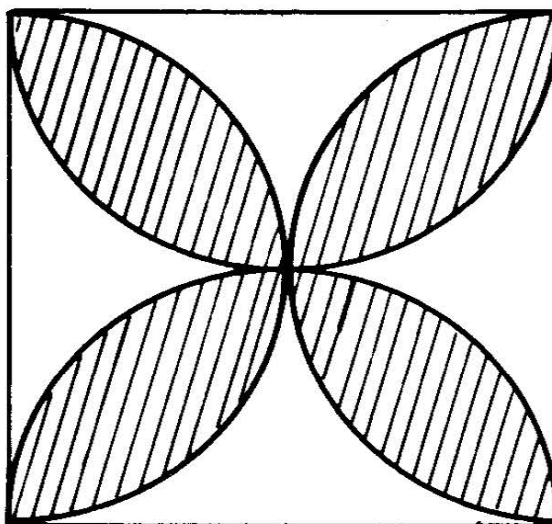
E) NRA.

248. Considere um quadrado de lado *a* e a figura abaixo. Calcule a área assinalada.

A) $a^2(\pi - 2)$

B) $\dfrac{a^2}{2}(2\pi - 1)$

C) $\dfrac{a^2}{2}(\pi - 2)$

D) $2a^2(\pi - 1)$

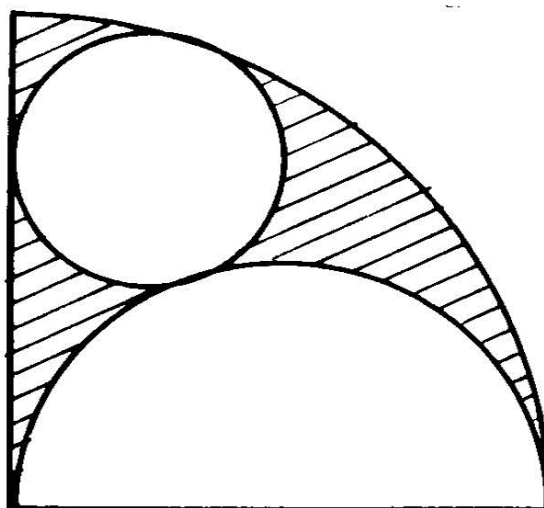
E) NRA.

249. Considere o quadrante de raio R da figura. Calcule a área assinalada.

A) $\dfrac{\pi R^2}{8}$

B) $\dfrac{\pi R^2}{12}$

C) $\dfrac{5\pi R^2}{24}$

D) $\dfrac{\pi R^2}{16}$

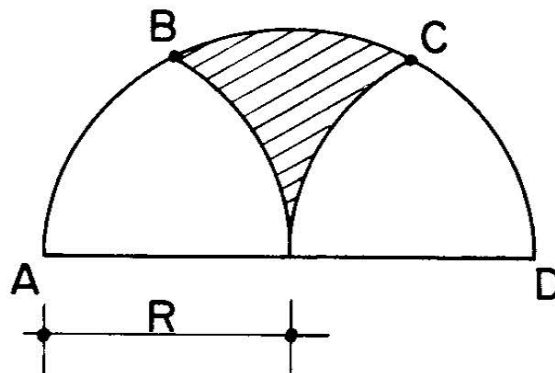
E) NRA.

250. Na figura abaixo, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{OC} = 60^\circ$. Calcule a área assinalada.

A) $\dfrac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$

B) $\dfrac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$

C) $R^2(3\sqrt{3} - 2\pi)$

D) $R^2(\pi - \sqrt{3})$

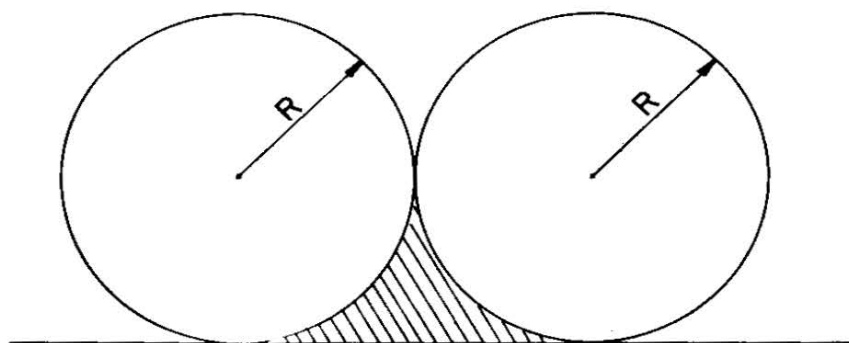
E) NRA.

251. Calcule a área assinalada.

A) $R^2(\pi - 2)$

B) $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$

C) $\frac{R^2}{2}(4 - \pi)$

D) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi)$

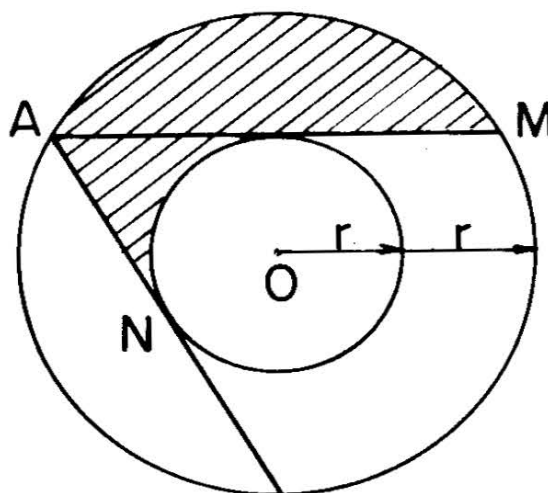
E) NRA.

252. (IME — 67) Calcule a área assinalada em função de r.

A) πr^2

B) $\frac{\pi r^2}{2}$

C) $\frac{2\pi r^2}{3}$

D) $2\pi r^2$

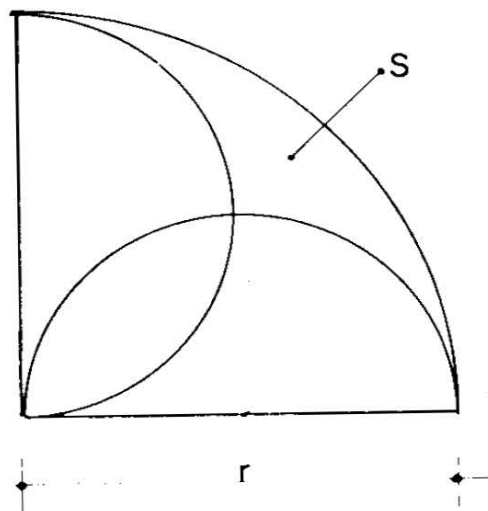
E) NRA.

253. Calcule a área S da figra em função do raio r do quadrante.

A) $r^2(\pi - 2)$

B) $\frac{r^2}{2}(\pi - 2)$

C) $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$

D) $\frac{r^2}{8}(\pi - 2)$

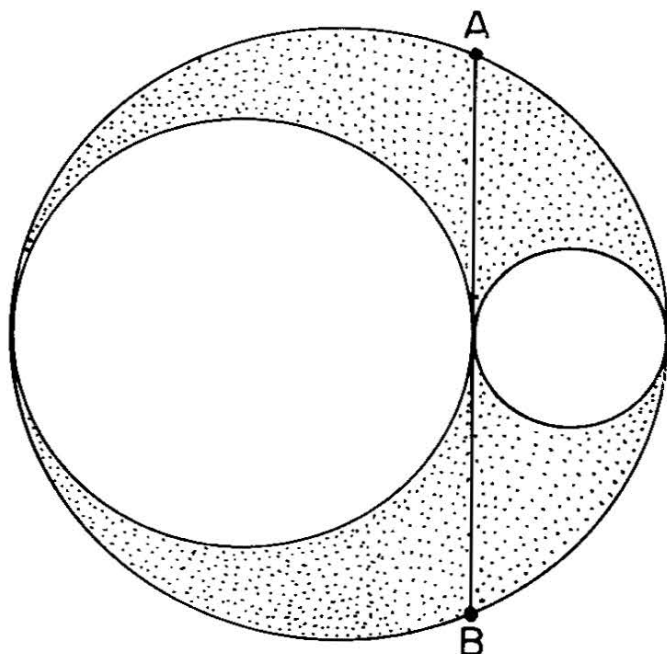
E) NRA.

254. (CICE — 70) Na figura abaixo, r é o raio do círculo maior e t é o comprimento da tangente $\overline{AB}$ comum aos dois círculos menores. Então, a área assinalada compreendida entre o círculo maior e os dois menores é:

A) $\dfrac{\pi r^2}{8}$

B) $\dfrac{\pi rt}{8}$

C) $\dfrac{\pi t^2}{8}$

D) $\dfrac{\pi (t - r)^2}{8}$

E) nada disso.

255. (CICE — 70) Considere um triângulo eqüilátero DEF inscrito em um triângulo eqüilátero ABC de modo que os lados de DEF sejam respectivamente perpendiculares aos lados de ABC. Então, a área do triângulo DEF é:

A) $\dfrac{1}{4}$ da área de ABC

B) $\dfrac{1}{3}$ da área de ABC

C) $\dfrac{1}{5}$ da área de ABC

D) $\dfrac{1}{2}$ da área de ABC

E) nada disso.

256. (CICE — 68) A altura de um triângulo eqüilátero T tem comprimento igual ao lado de um triângulo eqüilátero S. Se a área de T é 30, a de S é:

A) 40

B) $40\sqrt{3}$

C) $30\sqrt{3}$

D) $\dfrac{40}{3}\sqrt{3}$

E) NRA.

257. (CICE — 68) Seja p o perímetro e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. A área desse triângulo é:

A) $S = h \cdot p$

B) $S = \frac{1}{2} hp^2$

C) $S = h^2 + p^2$

D) $S = \frac{hp^2}{4(h + p)}$

E) $S = \frac{h^2 + p^2}{h + p}$

258. Calcule a área do círculo inscrito em um quadrante de raio r.

A) $r^2(\sqrt{2} - 1)$

B) $r^2(\sqrt{2} + 1)$

C) $r^2(3 - 2\sqrt{2})$

D) $r^2(3 + 2\sqrt{2})$

E) NRA.

259. Considere duas cordas paralelas de um semicírculo de raio 6 que determinam neste semicírculo arcos de 60° e 120°. Calcule a área da figura limitada por essas cordas e pelo semicírculo

A) 3π

B) 4π

C) $\frac{9}{2}\pi$

D) 6π

E) NRA.

260. Dado um triângulo de altura h, considere duas paralelas a base que o dividam em três partes equivalentes. Calcule em função de h as distâncias destas retas ao vértice do triângulo.

A) $\frac{1}{3}h$ e $\frac{2}{3}h$

B) $\frac{h\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{2h\sqrt{2}}{3}$

C) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{h\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{h\sqrt{6}}{6}$

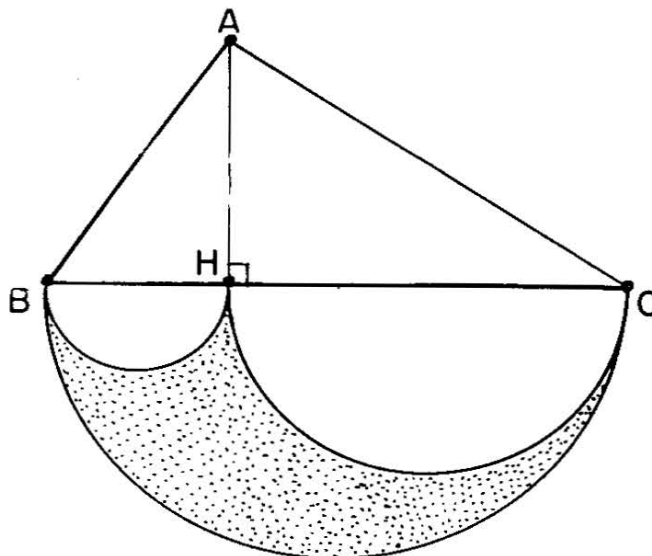
261. (CICE — JUL. — 70) Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo e H é a projeção de A sobre a hipotenusa. Constroem-se semicírculos sobre $\overline{BC}$, $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$. A região assinalada tem área igual à:

A) do quadrado de lado $\overline{AH}$

B) do disco de diâmetro $\overline{AH}$

C) do disco de raio $\overline{AH}$

D) do triângulo ABC

E) NRA.

262. Na figura abaixo, I é o incentro do triângulo ABC e $\overline{DE}$, $\overline{IF}$ e $\overline{IG}$ são paralelos a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Se AB = 8, AC = 10 e BC = 10, a razão entre as áreas dos triângulos ADE e IFG é:

A) 2

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

E) $\frac{9}{4}$

263. (CICE — JUL. — 70) Se o ângulo A de um triângulo ABC é igual ao ângulo A′ de A′B′C′, então:

A) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$

B) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{\text{sen } B \cdot \text{sen } C'}{\text{sen } B' \cdot \text{sen } C}$

C) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{AC^2}{A'C'^2}$

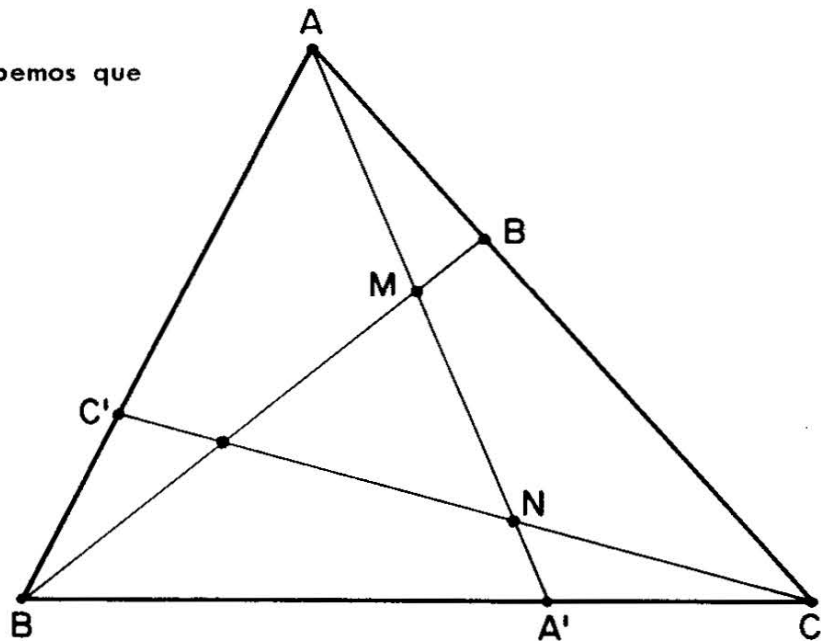
D) $\dfrac{\text{área de } ABC}{\text{área de } A'B'C'} = \dfrac{\text{perímetro de } ABC}{\text{perímetro de } A'B'C'}$

E) NRA.

264. Na figura abaixo, sabemos que

$CA' = \dfrac{1}{3} CB$

$AB' = \dfrac{1}{3} AB$

$BC' = \dfrac{1}{3} BA.$

A razão entre as áreas dos triângulos MNP e ABC é:

A) $\dfrac{1}{3}$

B) $\dfrac{1}{4}$

C) $\dfrac{1}{6}$

D) $\dfrac{1}{7}$

E) $\dfrac{1}{9}$.

265. Considere um quadrilátero ABCD de área S. O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD tem área:

A) $\dfrac{S}{2}$

B) $\dfrac{S}{3}$

C) $\dfrac{S}{4}$

D) indeterminado

E) NRA.

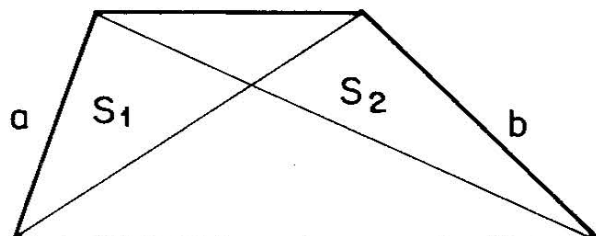
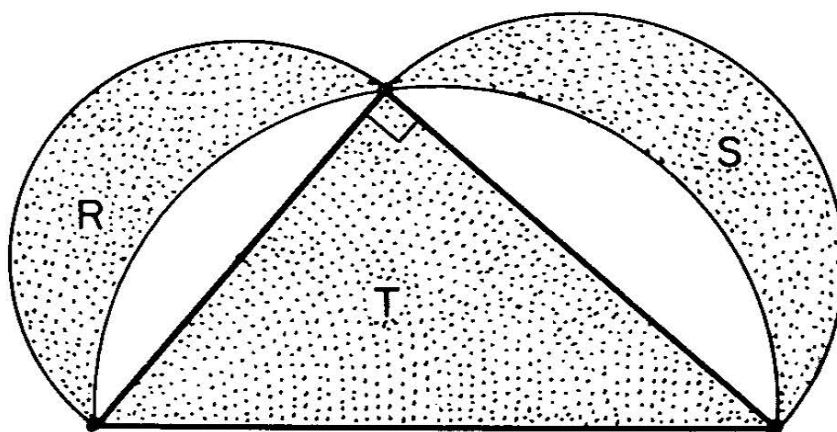
266. Considere o trapézio da figura. Então:

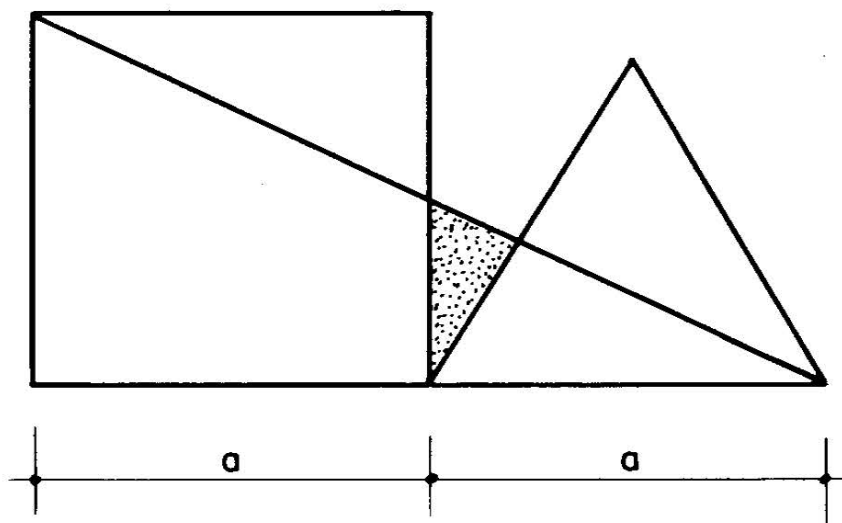
A) $S_1 < S_2$ se $a < b$

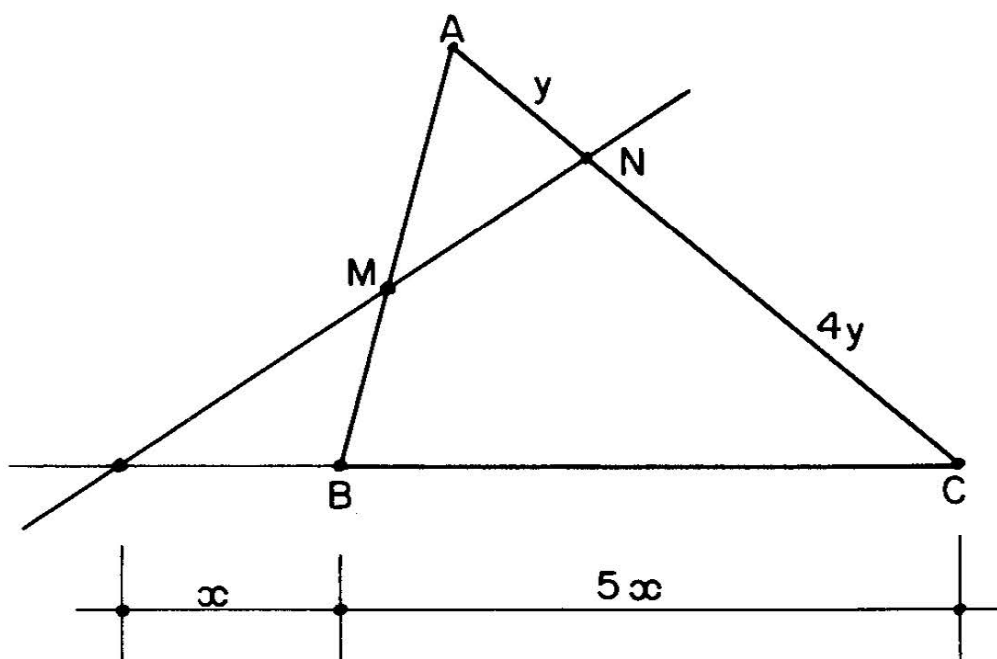
B) $S_1 > S_2$ se $a < b$

C) $S_1 = S_2$ se e só se $a = b$

D) $S = S_2$

E) NRA.

267. Constroem-se semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo, como mostra a figura. Prove que $R + S = T$.

268. É dado um triângulo retângulo ABC de catetos $AB = a$ e $AC = 2a$. Por M, meio de $\overline{AC}$, traçam-se $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ bissetriz de $N\widehat{M}C$. Calcule a área do triângulo MNP.

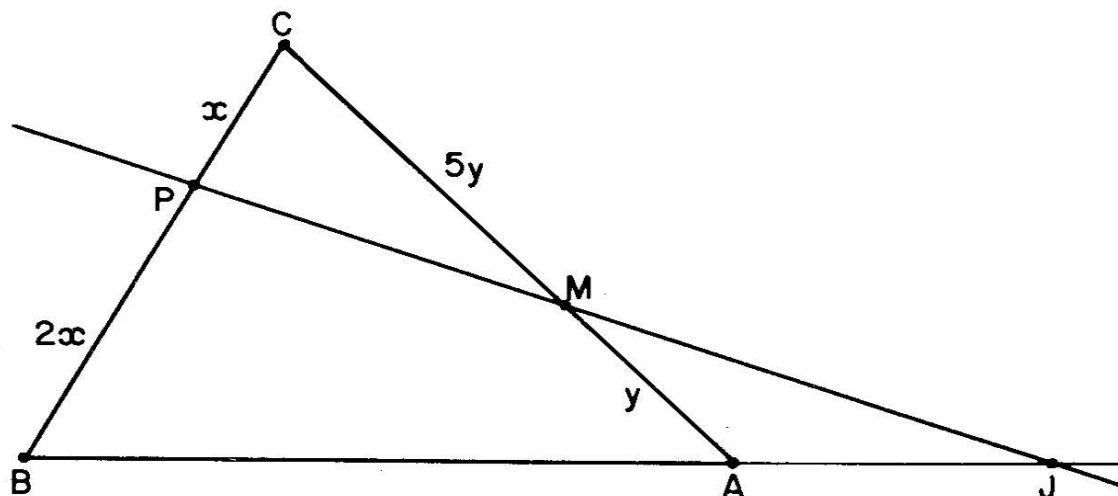
269. Considere um quadrado e um triângulo eqüilátero de mesmo lado a, como mostra a figura. Calcule a área assinalada.

270. Calcule, em função das bases *a* e *b* de um trapézio, o comprimento do segmento da paralela às bases que divide o trapézio em dois outros equivalentes.

271. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos AMN e ABC.

ENUNCIADO RELATIVO AOS PROBLEMAS 272, 273 e 274

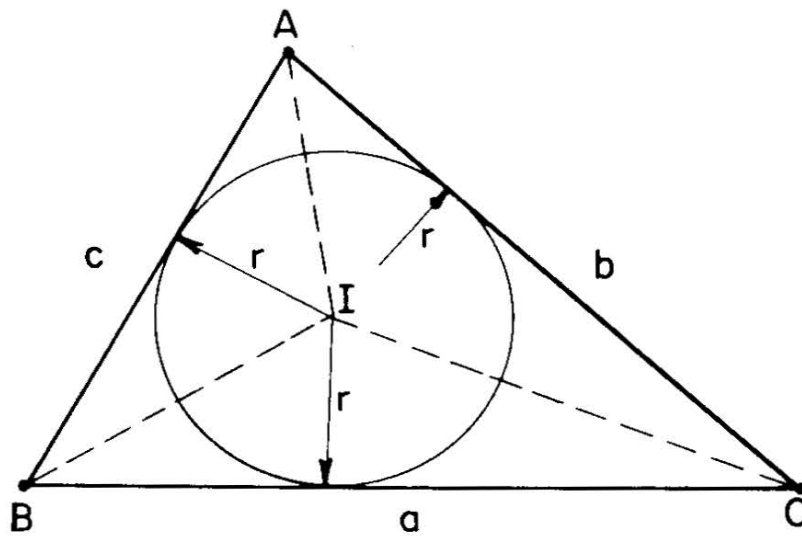
Na figura abaixo, sendo S a área do triângulo ABC, calcule:

272. A área do triângulo CPM.

273. A área do quadrilátero PMA.

274. A área do triângulo SAM.

CAPÍTULO 7

O TRIÂNGULO E SEUS CÍRCULOS

7.1 — O CÍRCULO INSCRITO

Seja S a área do triângulo ABC, de lados a, b e c. Sendo I o incentro, temos

$$S = S(BCI) + S(ACI) + S(ABI) \implies$$

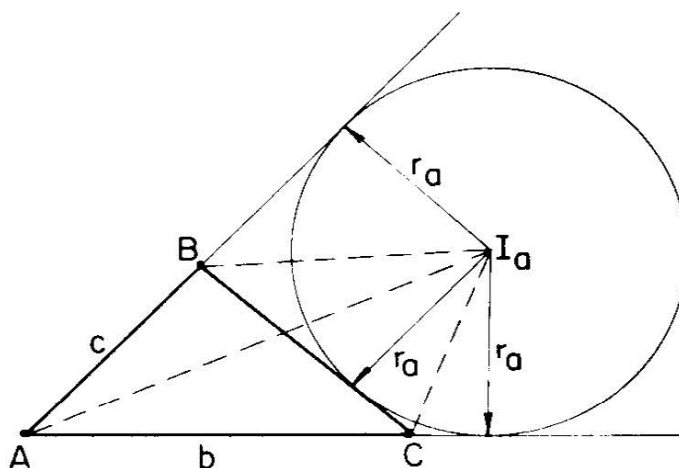
$$\implies S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{(a + b + c)\, r}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{2p \cdot r}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = pr}$$

7.2 — OS CÍRCULOS EXINSCRITOS

Consideremos o círculo exinscrito relativo ao lado *a* no triângulo ABC da figura.

Se S é a área do triângulo ABC, temos

$$S = S(ACI_a) + S(ABI_a) - S(BCI_a) \implies$$

$$\implies S = \frac{b \cdot r_a}{2} + \frac{c \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{(b + c - a) \cdot r_a}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{2(p - a) \cdot r_a}{2} \implies$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &= r_a (p - a) \\ S &= r_b (p - b) \\ S &= r_c (p - c) \end{aligned}}$$

e, analogamente,

7.3 — RELAÇÕES PRINCIPAIS

7.3.1 — Sabemos que

$$S = pr$$
$$S = r_a (p - a)$$
$$S = r_b (p - b)$$
$$S = r_c (p - c).$$

Multiplicando, temos

$$S^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot p \underbrace{(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

7.3.2 — Temos, ainda,

$$p - a = \frac{S}{r_a}$$

$$p - b = \frac{S}{r_b}$$

$$p - c = \frac{S}{r_c}.$$ Somando, temos

$$3p - \underbrace{(a + b + c)}_{2p} = S\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{p}{S} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \quad \text{Mas } \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Logo, $$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.}$$

7.3.3 — O raio do círculo inscrito no triângulo pode ser calculado em função das alturas, como se segue:

$$2s = ah_a = bh_b = ch_c \Longrightarrow$$

$$a = \frac{2s}{h_a} \quad (1)$$

$$b = \frac{2s}{h_b} \quad (2)$$

$$c = \frac{2s}{h_c}.$$ Somando, (3)

$$2p = 2s\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$ Mas

como $\frac{p}{S} = \frac{1}{r}$, temos

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.}$$

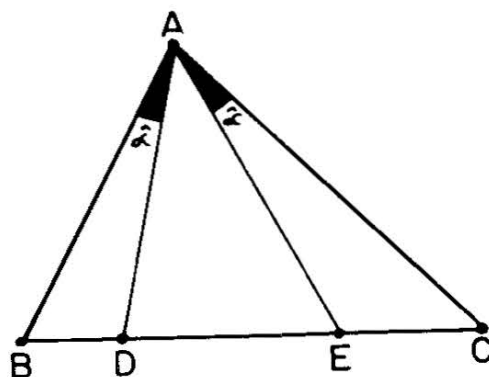
7.3.4 — Também poderemos calcular os raios dos círculos exinscritos em função das alturas, bastando operar convenientemente as relações 7.3.3 — (1), (2) e (3), que forneceriam os seguintes resultados:

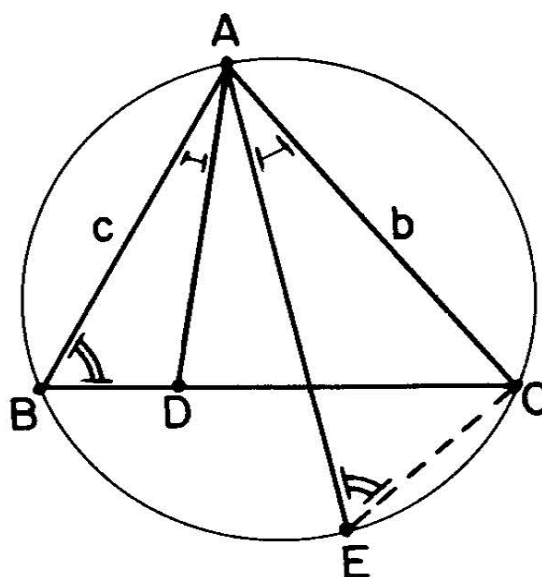
$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

7.4 — CEVIANAS ISOGONAIS

Se duas cevianas partem do mesmo vértice e fazem mesmo ângulo com os lados que concorrem nesse vértice, são chamadas isogonais.

AD e AE são isogonais

Sejam $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ duas cevianas isogonais no triângulo ABC. (D sobre a base e E no círculo circunscrito.)

Verificamos que os triângulos ADB e ACE são semelhantes, pois:

1) $B\hat{A}D = E\hat{A}C$ por construção

2) $A\hat{B}D = A\hat{E}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

Podemos, então, escrever

$$\frac{c}{AE} = \frac{AD}{b} \implies \boxed{bc = AD \cdot AE.}$$

7.5 — O CÍRCULO CIRCUNSCRITO

Considerando ainda a mesma figura do item anterior, vemos que os triângulos ADB e ACE são semelhantes independentemente do ângulo que $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ formam com $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Assim, nestes triângulos, se $\hat{D} = 90°$, então $\hat{C} = 90°$, sendo, portanto, $\overline{AD}$ a altura relativa ao lado a e $\overline{AE}$ o diâmetro do círculo circunscrito. Aplicando a propriedade anterior, temos

$$b \cdot c = h_a \cdot 2R.$$

Multiplicando ambos os termos por a, vem

$$abc = a \cdot h_a \cdot 2R, \text{ mas } a \cdot h_a = 2s.$$

Logo, $\boxed{abc = 4\ RS.}$

7.6 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

275. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo de lados 10, 17 e 21.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 17 \\ c = 21 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad p = 24$$

$$S = \sqrt{24\,(24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)} =$$

$$= \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84$$

$$S = pr \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 84 = 24 \cdot r \Longrightarrow r = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$$

Resposta: $\frac{7}{2}$.

276. Calcule os raios dos círculos exinscritos do triângulo do problema anterior.

Solução

Temos:	
$a = 10$	$S = r_a\,(p - a)$
$b = 17$	$84 = r_a\,(24 - 10) \Longrightarrow r_a = 6$
$c = 21$	$S = r_b\,(p - b)$
$p = 24$	$84 = r_b\,(24 - 17) \Longrightarrow r_b = 12$
$S = 84$	$S = r_c\,(p - c)$
	$84 = r_c\,(24 - 21) \Longrightarrow r_c = 28$

Respostas: 6, 12 e 28.

277. Calcule o raio do círculo circunscrito ao triângulo de lados 10, 17 e 21.

1.ª Solução

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 17 \\ c = 21 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad p = 24, \; S = 84 \text{ (já calculado; n.º 275)}$$

$$abc = 4\,RS$$

$$10 \cdot 17 \cdot 21 = 4\,R \cdot 84 \Longrightarrow R = \frac{85}{8}$$

2.ª Solução

Já tendo calculado nos problemas n.os 275 e 276 os raios dos círculos inscritos e exinscritos, poderemos calcular o raio do círculo circunscrito utilizando a relação dos cinco raios (Geometria I, n.º 8.7.3).

Temos: $r = \frac{7}{2}$

$r_a = 6$

$r_b = 12$

$r_c = 28.$

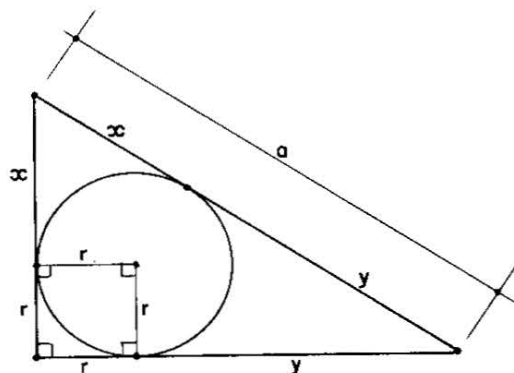
Sabemos que $4R = r_a + r_b + r_c - r \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 4R = 6 + 12 + 28 - \frac{7}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R = \frac{85}{8}$$

Resposta: $\frac{85}{8}$.

278. Calcule o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo de perímetro 2p e hipotenusa a.

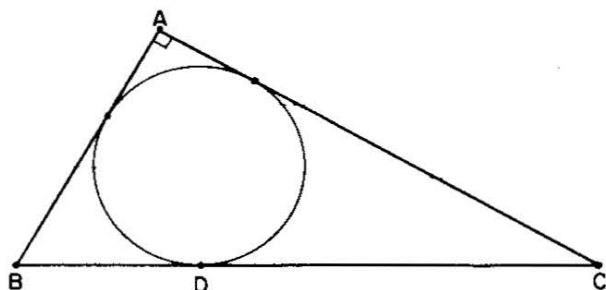
Solução

Considerando o triângulo da figura, temos

$$2x + 2y + 2r = 2p$$

$$\underbrace{x + y}_{a} + r = p \implies r = p - a$$

Resposta: $r = p - a$.

279. Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja D o ponto de contato do círculo inscrito com a hipotenusa. Prove que a área desse triângulo é $BD \cdot DC$.

Solução

$S = pr$, mas $r = p - a$.

Logo, $S = p \cdot (p - a)$.

Como

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, concluímos que no triângulo retângulo $S = (p-b)(p-c)$. Mas $p-b = BD$ e $p-c = DC$. Então,

$$S = BD \cdot DC$$

280. (IME — 65) Calcule os lados de um triângulo conhecendo as alturas

$$h_a = \frac{1}{9}, \quad h_b = \frac{1}{7} \quad e \quad h_c = \frac{1}{4}.$$

1.ª Solução

De acordo com as relações 7.3.3 e 7.3.4, temos

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Longrightarrow \frac{1}{r} = 9 + 7 + 4 \Longrightarrow r = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \Longrightarrow \frac{1}{r_a} = 7 + 4 - 9 \Longrightarrow r_a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \Longrightarrow \frac{1}{r_b} = 9 + 4 - 7 \Longrightarrow r_b = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \Longrightarrow \frac{1}{r_c} = 9 + 7 - 4 \Longrightarrow r_c = \frac{1}{12}.$$

Mas $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

Logo, $S = \sqrt{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{5}}{120}$.

Como $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, teremos

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = a \cdot \frac{1}{9} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = b \cdot \frac{1}{7} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{120} = c \cdot \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{\sqrt{5}}{15}.$$

2.ª Solução

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S \qquad \text{ou}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{4} = 2S. \qquad \text{Então,}$$

$$a = 18S$$
$$b = 14S$$
$$c = 8S$$

$$2p = 40S \implies p = 20S.$$

Pela fórmula de Heron, temos

$$S^2 = 20S\,(2S)(6S)(12S) \implies S = \frac{\sqrt{5}}{120}.$$

$$a = \frac{18\sqrt{5}}{120} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

$$b = \frac{14\sqrt{5}}{120} = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

$$c = \frac{8\sqrt{5}}{120} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

Resposta: $\frac{3\sqrt{5}}{20}$, $\frac{7\sqrt{5}}{60}$ e $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

281. O raio do círculo inscrito em um triângulo de lados 5, 7 e 8 é:

A) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

B) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

E) NRA.

282. Os lados de um triângulo medem 5, 7 e 8. O maior círculo exinscrito tem raio igual a:

A) $10\sqrt{3}$

B) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

C) $5\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

E) NRA.

283. Os lados de um triângulo medem 5, 7 e 8. O menor círculo exinscrito tem raio igual a:

A) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

B) $5\sqrt{3}$

C) $\sqrt{3}$

D) duas vezes o raio do círculo nele inscrito

E) NRA.

284. Em um triângulo, $a = 4$ e $b + c = 6$. A razão $\frac{r}{r_a}$ é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{5}$.

285. Em um triângulo, $a = 7$, $b = 10$ e $c = 11$. Então, $\frac{r_a}{r_b}$ vale:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{3}{7}$

E) $\frac{4}{7}$.

286. Em um triângulo, o produto dos raios dos círculos exinscritos é igual a:

A) p^2r

B) $2p^2r$ — p = semiperímetro

C) pr^2 — r = raio do círculo inscrito.

D) $2pr^2$

E) NRA.

287. (CICE — 70) A soma dos inversos das alturas de qualquer triângulo é igual:

A) à soma dos inversos dos lados

B) ao inverso do raio do círculo inscrito

C) ao inverso do raio do círculo circunscrito

D) à razão do raio do círculo inscrito para o quadrado do raio do círculo circunscrito

E) nenhum destes.

288. Em um triângulo de lados a, b e c o produto dos raios dos círculos inscrito e circunscrito é dado por:

$$Rr = k \frac{abc}{a + b + c}, \text{ onde } k \text{ vale:}$$

A) 1

B) 2

C) 4

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{4}$

289. Calcule o raio do círculo circunscrito a um triângulo isósceles ABC onde $AB = AC = b$ e a altura $AH = h$.

A) $\frac{b^2}{h}$

B) $\frac{b^2}{2h}$

C) $\frac{2b^2}{h}$

D) $\frac{b(b + h)}{h}$

E) NRA.

290. Em um triângulo ABC a soma das alturas $h_a + h_b + h_c$ é igual a:

A) $\dfrac{ab + bc + ca}{2R}$

B) $\dfrac{ab + bc + ca}{4R}$

C) $\dfrac{abc}{4R^2}$

D) $\dfrac{abc}{2R^2}$

E) NRA.

291. Em um triângulo,

$$\frac{h_a}{bc} + \frac{h_b}{ac} + \frac{h_c}{ab}$$

é igual a:

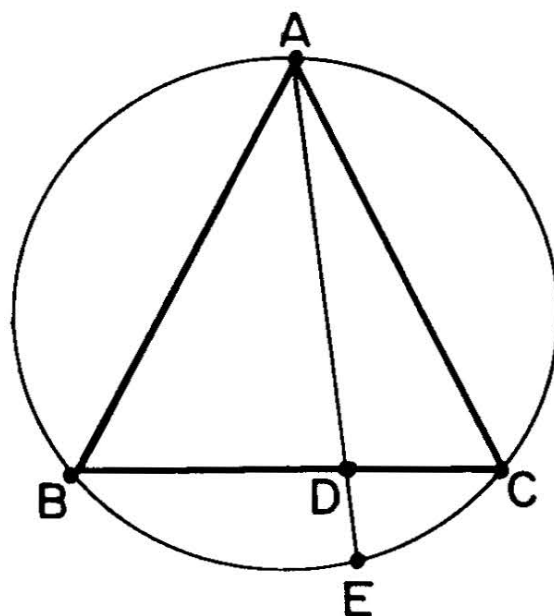
A) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

B) $\dfrac{1}{R}$

C) $\dfrac{3}{4R}$

D) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

E) NRA.

R = raio do círculo circunscrito.

292. Na figura ao lado, AB = AC = 5 e AD = 4. O prolongamento da ceviana $\overline{AD}$ encontra o círculo circunscrito ao triângulo ABC em E. Então, DE mede:

A) 2

B) 2,25

C) 2,5

D) indeterminado

E) NRA.

293. Calcule a área de um triângulo sabendo que os raios dos círculos exinscritos medem 3, 4 e 6.

A) $\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{6}$

B) $2\sqrt{6}$ D) $8\sqrt{6}$

E) NRA.

294. O raio do círculo circunscrito ao triângulo cujos lados medem 5, 7 e 8 mede:

A) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ C) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

B) $\frac{7}{3}\sqrt{3}$ D) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

E) NRA.

295. Considere dois círculos de centros A e B e raios a e b, respectivamente, estando B sobre o círculo de centro A. Se $\overline{MN}$ é uma corda do círculo de centro A, tangente ao círculo de centro B, o produto BM · BN vale:

A) $\frac{ab}{2}$ C) $2ab$

B) ab D) a^2

E) b^2.

296. Um triângulo ABC de lados AB = 6, AC = 4 e BC = 5 está inscrito num círculo. A bissetriz AD encontra o círculo circunscrito em E. Então, DE mede:

A) 1 C) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{2}$ D) 2

E) NRA.

297. Um triângulo ABC de lados AB = 8 e AC = 12 está inscrito em um círculo de raio igual a 8. A altura relativa ao lado a desse triângulo mede:

A) 3 C) 6

5) 4 D) 8

E) 9.

298. Seja S a área de um triângulo ABC e 2p seu perímetro. Então

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}$$

é igual a:

A) $\frac{S}{p^2}$

B) $\frac{p^2}{S}$

C) $\frac{2p^2}{S}$

D) $\frac{S}{4p^2}$

E) NRA.

299. Em um triângulo ABC, $\cos\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos\frac{\widehat{B}}{2} \cdot \cos\frac{\widehat{C}}{2}$ é igual a:

A) $\frac{p}{R}$

B) $\frac{2p}{R}$

C) $\frac{p}{2R}$

D) $\frac{p}{4R}$

E) NRA.

p = semiperímetro

R = raio do círculo circunscrito.

300. Em um triângulo ABC, $\text{sen}\,\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\widehat{B}}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\widehat{C}}{2}$ é igual a:

A) $\frac{r}{R}$

B) $\frac{2r}{R}$

C) $\frac{r}{2R}$

D) $\frac{r}{4R}$

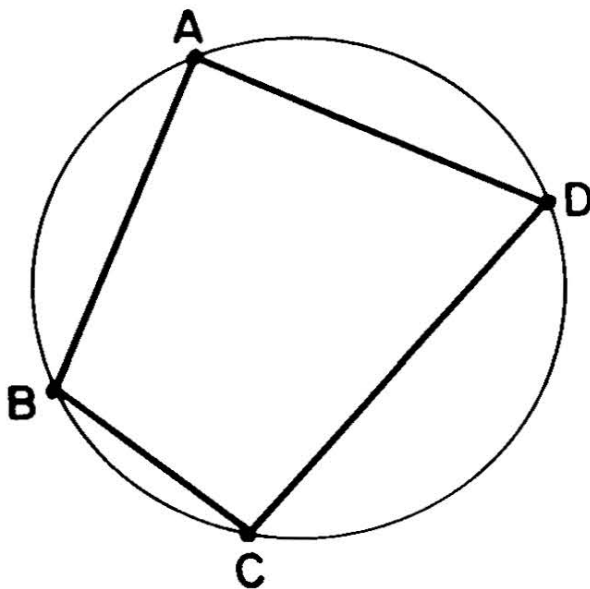
E) NRA.

r = raio do círculo inscrito

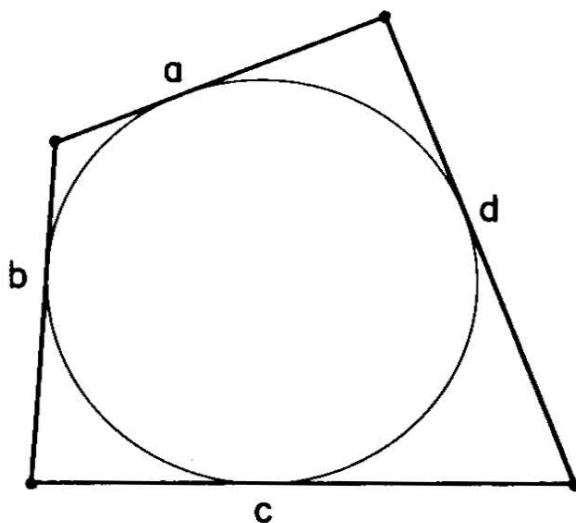
R = raio do círculo circunscrito.

CAPÍTULO 8

OS QUADRILÁTEROS

8.1 — QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Os quatro vértices pertencem a um mesmo círculo.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{O}=180^\circ}$

8.2 — QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL

Os quatro lados são tangentes a um mesmo círculo.

$\Longrightarrow$ $\boxed{a + b = c + d}$

8.3 — RELAÇÃO DE EULER (quadrilátero qualquer)

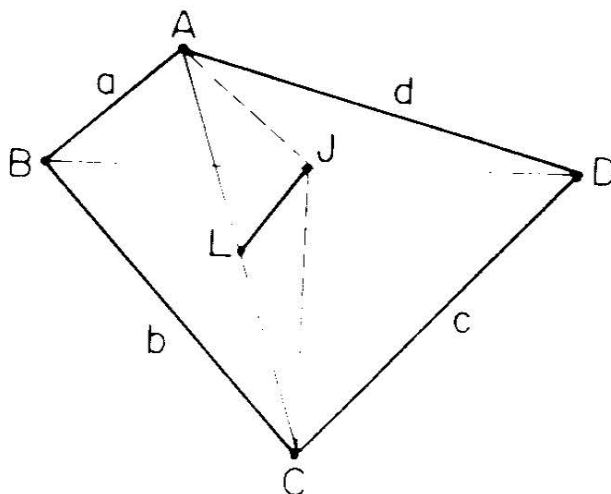
Num quadrilátero qualquer, a soma dos quadrados dos quatro lados é igual à soma dos quadrados das diagonais mais quatro vezes o quadrado da mediana de Euler do quadrilátero.

Demonstração

Consideremos um quadrilátero qualquer ABCD, sendo

lados $\begin{cases} AB = a \\ BC = b \\ CD = c \\ DA = d \end{cases}$

diagonais $\begin{cases} AC = P \\ BD = q \end{cases}$

mediana de Euler* JL = m.

Como J é médio de BD, $\overline{AJ}$ e $\overline{CJ}$ são medianas nos triângulos ABD e CBD. Logo,

$$4\,AJ^2 = 2\,(a^2 + d^2) - q^2$$

$$4\,CJ^2 = 2\,(b^2 + c^2) - q^2$$

Somando e dividindo por 2, temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - q^2 = 2\,(AJ^2 + CJ)^2. \qquad (1)$$

Mas, no triângulo AJC, JL = m é mediana. Logo,

$$4\,m^2 = 2\,(AJ^2 + CJ^2) - p^2 \qquad \text{ou}$$

$$2\,(AJ^2 + CJ^2) = 4\,m^2 + p^2$$

Substituindo (2) em (1), teremos

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4\,m^2}$$

---

* A mediana de Euler é o segmento que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.

8.4 — APLICAÇÃO NOS TRAPÉZIOS

8.4.1 — Trapézio escaleno

Consideremos um trapézio ABCD onde temos

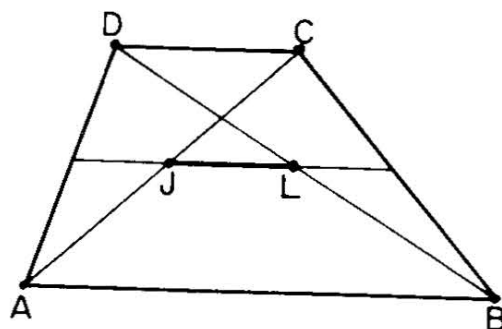
bases $\begin{cases} AB = b \\ CD = b' \end{cases}$

lados não paralelos $\begin{cases} AD = a \\ BC = c \end{cases}$

diagonais $\begin{cases} AC = p \\ BD = q \end{cases}$

mediana de Euler $JL = m = \dfrac{b - b'}{2}$

Substituindo na relação encontrada em 9.3, teremos

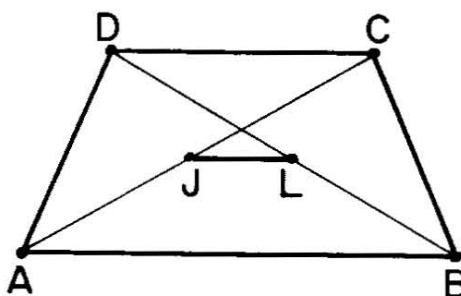
$$\boxed{2bb' + a^2 + c^2 = p^2 + q^2}$$

8.4.2 — Trapézio isósceles

No trapézio isósceles ABCD, devemos considerar

$AD = CB = a$

$AC = BD = p$

Assim, a relação anterior toma a forma

$$\boxed{a^2 + bb' = p^2}$$

8.5 — APLICAÇÃO NO PARALELOGRAMO

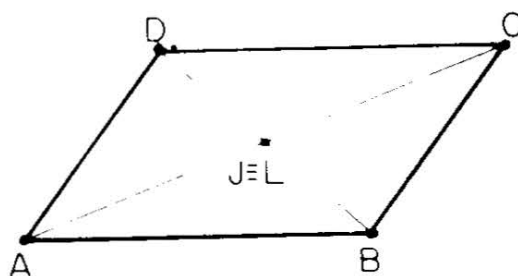
Consideremos um paralelogramo ABCD onde

$AB = CD = a$

$BD = BC = b$

$AC = p$

$AD = q$

$JL = O.$

Substituindo na relação de Euler, temos

$$2\,(a^2 + b^2) = p^2 + q^2$$

8.6 — RELAÇÕES EM QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

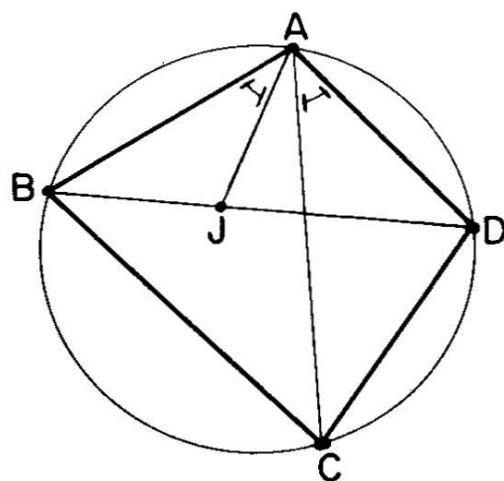
8.6.1 — Relação de Ptolomeu

Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Demonstração

Consideremos o quadrilátero inscritível ABCD da figura, sendo

lados $\begin{cases} AB = a \\ BC = b \\ CD = c \\ DA = d \end{cases}$

diagonais $\begin{cases} AC = p \\ BD = q. \end{cases}$

Consideremos ainda $\overline{AJ}$ isogonal de $\overline{AC}$ em relação a $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Assim, $B\hat{A}J = C\hat{A}D$.

Da semelhança dos triângulos AJD e ABC, temos

$$\frac{JD}{b} = \frac{d}{p} \Longrightarrow JD \cdot p = bd. \qquad (1)$$

Da semelhança dos triângulos AJB e ADC, temos

$$\frac{BJ}{c} = \frac{a}{p} \Longrightarrow BJ \cdot p = ac \qquad (2)$$

Somando (1) e (2), temos

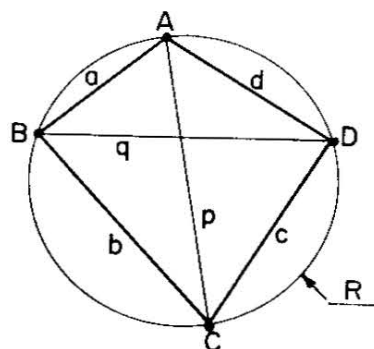
$$p\,(BJ + JD) = ac + bd \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{pq = ac + bd}$$

8.6.2 — Relação de Hiparco

A razão das diagonais de um quadrilátero é a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais.

Demonstração

Consideremos o quadrilátero inscritível ABCD, da figura, e notemos que sua área é equivalente à soma de dois triângulos com um lado comum $\overline{AC}$ ou com um lado comum $\overline{BD}$, o que permite escrever

$$S\,(BAC) + S\,(DAC) = S\,(ABD) + S\,(CBD)$$

Como os quatro triângulos possuem o mesmo círculo circunscrito e, de acordo com a relação 8.5, temos

$$\frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} \implies$$

$$\implies p\,(ab + cd) = q\,(ad + bc) \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}}$$

8.7 — ÁREA DO QUADRILÁTERO CONVEXO

Seja ABCD um quadrilátero convexo qualquer de diagonais AC = p e BD = q, sendo $\widehat{\alpha}$ o ângulo formado por elas.

Sendo S a área do quadrilátero ABCD, podemos escrever

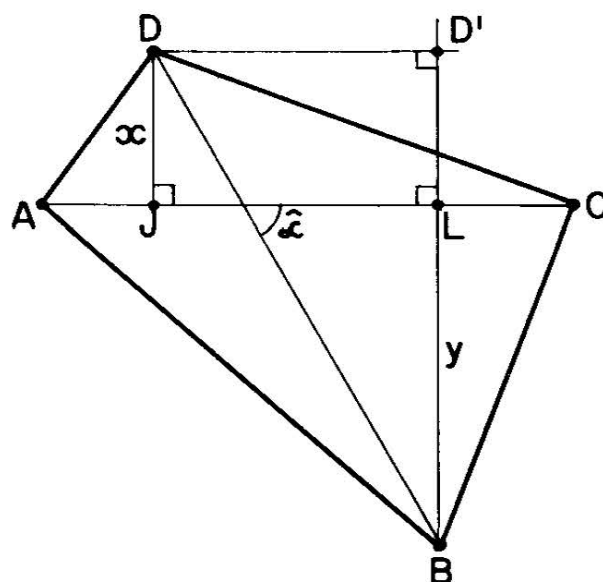
$$S = S\,(ACD) + S\,(ABC).$$

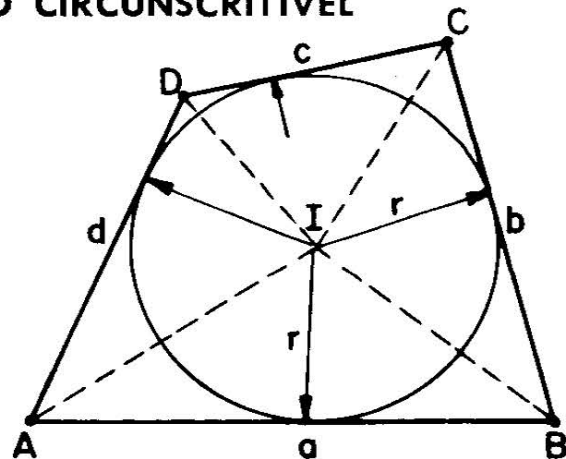
Sendo DJ = x e BL = y perpendiculares a $\overline{AC}$, teremos

$$S = \frac{1}{2}\,px + \frac{1}{2}\,py \implies$$

$$\implies S = \frac{1}{2}\,p(x + y).$$

Porém, $x + y = BD' = q \operatorname{sen} \widehat{\alpha}$. Logo,

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\,pq \operatorname{sen} \widehat{\alpha}}$$

8.8 — ÁREA DO QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL

Consideremos o quadrilátero circunscritível ABCD da figura. Sejam a, b, c, d os comprimentos de seus lados, r o raio do círculo inscrito e I o incentro. Se S é área do quadrilátero e p o semiperímetro, temos

$$S = S(AIB) + S(BIC) + S(CID) + S(DIA) \implies$$

$$\implies S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} \implies$$

$$\implies S = \frac{(a + b + c + d)}{2} \cdot r \implies$$

$$\implies S = \frac{2p}{2} \cdot r \implies$$

$$\implies \boxed{S = pr}$$

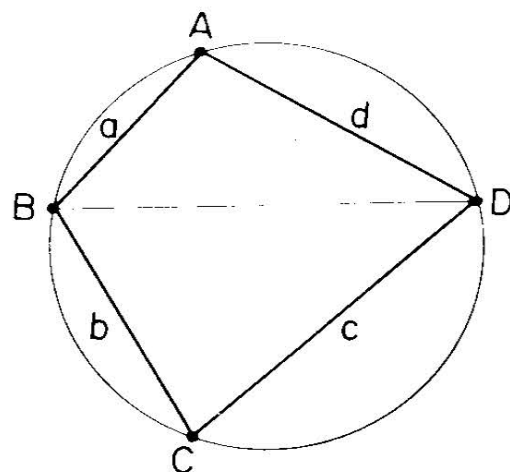
8.9 — ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Consideremos o quadrilátero ABCD da figura.

A Lei dos co-senos nos triângulos ABD e CBD fornece

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\widehat{A}$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\widehat{C}$$

Mas, como $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$, $\cos\widehat{C} = -\cos\widehat{A}$.

Igualando as expressões, temos

$$b^2 + c^2 + 2\,bc \cos \widehat{A} = a^2 + d^2 - 2\,ad \cos \widehat{A} \implies$$

$$\implies 2\,(ad + bc) \cos \widehat{A} = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \implies$$

$$\implies \cos \widehat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(ad + bc)}.$$

Calculemos agora $1 + \cos \widehat{A}$.

$$1 + \cos \widehat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2\,ad + 2\,bc}{2\,(ad + bc)}$$

Mas $1 + \cos \widehat{A} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2}$. Então,

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2\,(ad + bc)} \implies$$

$$\implies 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}{2\,(ad + bc)}.$$

Sendo $2\,p$ o perímetro do quadrilátero, temos

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{2\,(p - c) \cdot 2\,(p - b)}{2\,(ad + bc)} \implies$$

$$\implies \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(p - c)(p - b)}{(ad + bc)}$$ e, analogamente,

como $1 - \cos \widehat{A} = 2 \cos^2 \frac{\widehat{A}}{2}$, encontraríamos

$$\cos^2 \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(p - a)(p - d)}{ad + bc}.$$

A área S do quadrilátero é a soma das áreas dos triângulos ADB e CDB.

$$S = \frac{ad \operatorname{sen} \widehat{A}}{2} + \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{C}}{2}.$$

Mas $\operatorname{sen} \widehat{A} = \operatorname{sen} \widehat{C}$, pois $\widehat{A} + \widehat{C} = 150°$. Logo,

$$S = \frac{ad + bc}{2} \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} \implies$$

$$\implies S = \frac{ad + bc}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Quadrando,

$$S^2 = (ad + bc)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos^2 \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$S^2 = (ad + bc)^2 \frac{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ad + bc)^2} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.}$$

8.10 — ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL E CIRCUNSCRITÍVEL

Em um quadrilátero inscritível,

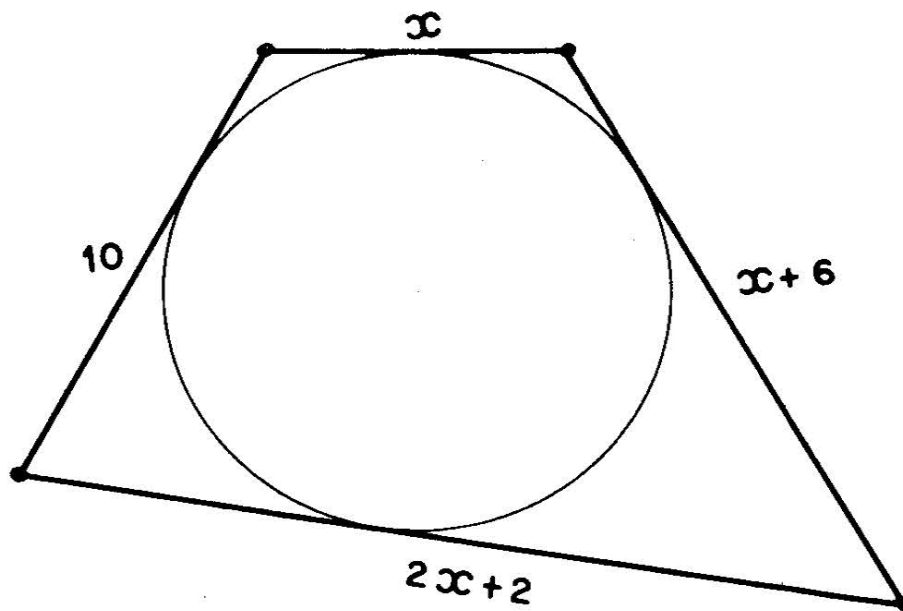
$$a + c = b + d = p.$$

Teremos, então,

$$S = \sqrt{(a + c - a)(b + d - b)(a + c - c)(b + d - d)} \implies$$

$$\implies \boxed{S = \sqrt{abcd}.}$$

8.11 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

301. Calcule x no quadrilátero da figura.

Solução

Porque o quadrilátero é circunscritível,

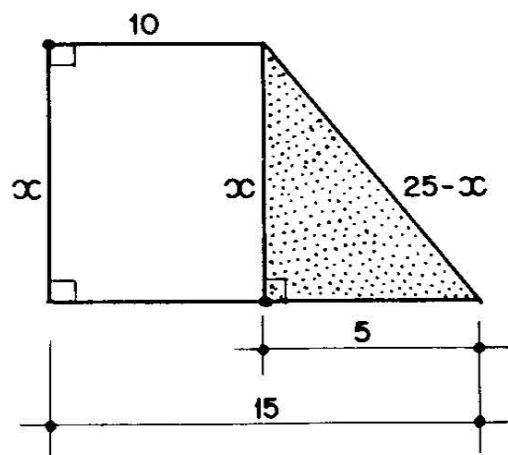
$$10 + x + 6 = x + 2x + 2 \Longrightarrow x = 7$$

Resposta: 7

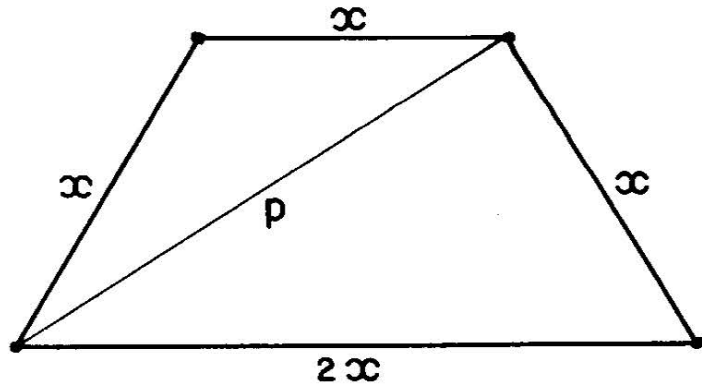
302. Calcule a altura de um trapézio retângulo circunscritível de bases 15 e 10.

Solução

$(25 - x)^2 = x^2 + 5^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = 12$

Resposta: 12

303. Calcule o comprimento das diagonais do trapézio isósceles da figura.

Solução

De 8.4.2, temos

$$x^2 + x \cdot 2x = p^2 \implies p = x\sqrt{3}$$

Resposta: $x\sqrt{3}$.

304. Calcule as diagonais de um quadrilátero inscritível em função dos lados.

Solução

Conhecemos as relações de Ptolomeu e Hiparco (8.6.1 e 8.6.2)

$$pq = ac + bd$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

Multiplicando membro a membro,

$$pq \cdot \frac{p}{q} = (ac + bd)\,\frac{ab + cd}{ad + bc} \implies$$

$$\implies p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

Dividindo membro a membro,

$$pq \cdot \frac{q}{p} = (ac + bd) \frac{ad + bc}{ab + cd} \implies$$

$$\implies q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

305. Calcule a menor diagonal do quadrilátero inscritível ABCD cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem respectivamente 1, 2, 2 e 3.

A) $\sqrt{2}$

B) 2

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{7}$

E) NRA.

306. A mediana de Euler do quadrilátero do problema anterior tem comprimento igual a:

A) $\sqrt{\frac{69}{7}}$

B) $\sqrt{\frac{52}{7}}$

C) $\sqrt{\frac{27}{7}}$

D) $\sqrt{\frac{13}{7}}$

E) NRA.

307. O raio do círculo circunscrito ao quadrilátero do problema 305 mede:

A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

C) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

D) $\sqrt{\frac{14}{3}}$

E) NRA.

308. Calcule o comprimento do segmento que une os pontos médios das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um trapézio, conhecendo seus lados: AB = 14, BC = 7, CD = 4 e DA = 5.

A) 2

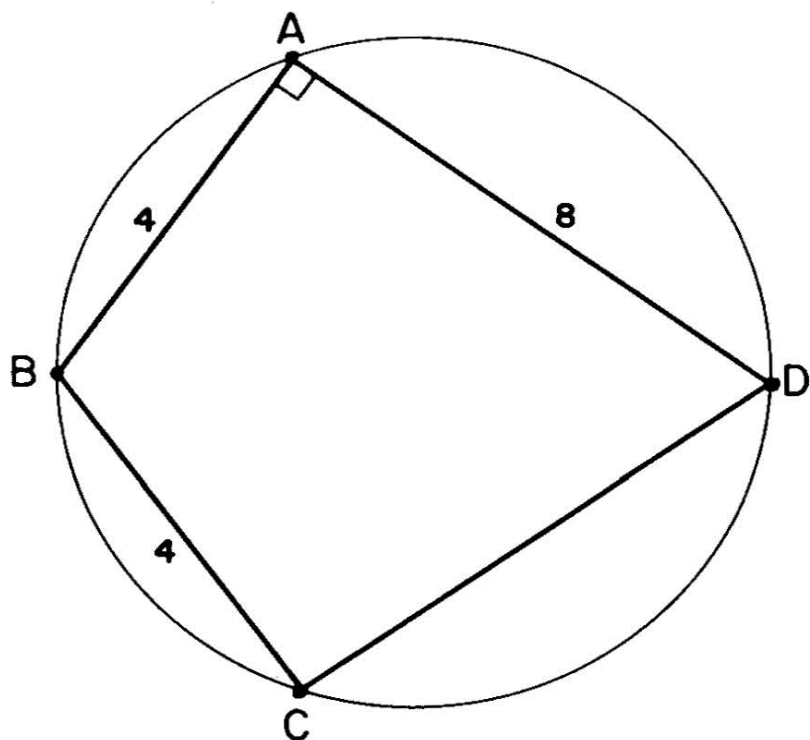
B) $2\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$

E) NRA.

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 309 A 312

No quadrilátero inscritível da figura, AB = BC = 4 AD = 8 e $\hat{A} = 90°$.

309. A área desse quadrilátero mede:

A) 32

B) 28

C) 24

D) 16

E) NRA.

310. O raio do círculo inscrito nesse quadrilátero mede:

A) $\frac{12}{5}$

B) $\frac{16}{3}$

C) $\frac{8}{3}$

D) $\frac{9}{4}$

E) NRA.

311. O raio do círculo circunscrito a esse quadrilátero mede:

A) $\sqrt{20}$
C) $\sqrt{58}$
B) $2\sqrt{20}$
D) $\sqrt{65}$
E) NRA.

312. A menor diagonal desse quadrilátero mede:

A) $\sqrt{20}$
C) $\frac{4}{5}\sqrt{20}$
B) $\frac{5}{4}\sqrt{20}$
D) $\frac{2}{3}\sqrt{20}$
E) NRA.

313. Calcule a área do quadrilátero ABCD inscritível cujos lados medem: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ e $DA = 7$.

A) $\sqrt{15}$
C) $2\sqrt{15}$
B) $\sqrt{30}$
D) $2\sqrt{30}$
E) NRA.

314. (CICE — 70) Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas *a* e *b*, e uma das diagonais tem por medida *c*. Então, a medida da outra diagonal é:

A) $\sqrt{3(a^2 + b^2) - 2c^2}$
B) $\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$
C) $\sqrt{4(a^2 + b^2) - 3c^2}$
D) $\sqrt{2ab - c}$
E) nada disso.

315. (IME — 66) Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

A) 8
C) $8\sqrt{2}$
B) $6\sqrt{2}$
D) $10\sqrt{2}$
E) NRA.

316. Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda do arco diferença dos arcos das cordas anteriores.

A) 4
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$
E) $6\sqrt{2}$.

317. O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de um quadrilátero que possui diagonais perpendiculares:

A) pode ser qualquer quadrilátero
B) é um retângulo
C) é um losango
D) é um quadrado
E) NRA.

318. Num quadrilátero inscritível ABCD, AD = DC. Se as diagonais desse quadrilátero cortam-se em I e se AI = 6, CI = 4 e BI = 8, o maior lado desse quadrilátero mede:

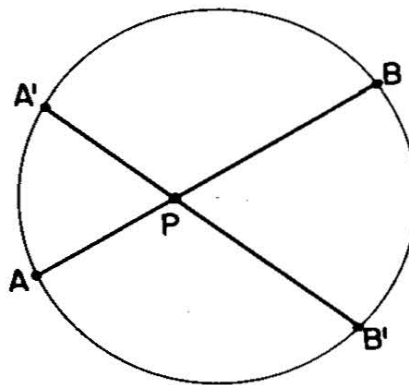
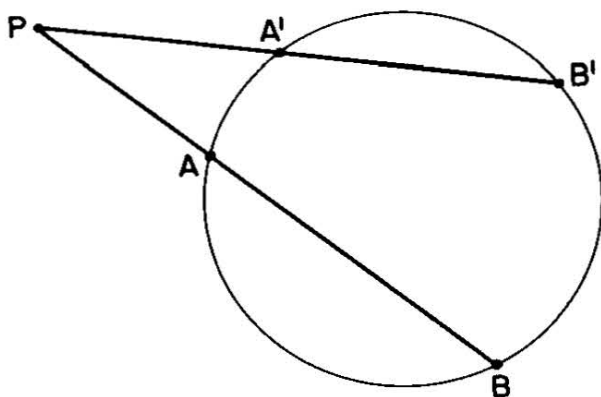
A) $\sqrt{33}$
B) $2\sqrt{33}$
C) $3\sqrt{33}$
D) $4\sqrt{7}$
E) NRA.

CAPÍTULO 9

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

9.1 — TEOREMA

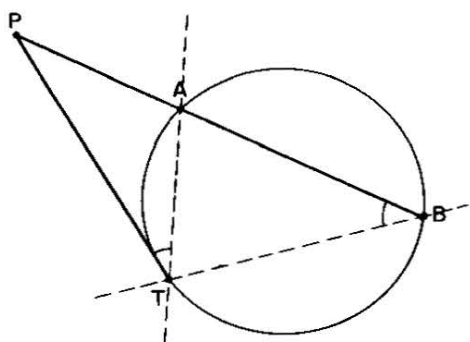
Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de um círculo concorrem em um ponto P interior ou exterior a esse círculo, o produto PA · PB é igual a PA′ · PB′.

Demonstração

Realmente, porque AA′ e $\overline{BB'}$ são antiparalelas em relação a $\overline{PA}$ e $\overline{PA'}$, efetivamente podemos escrever

$$\boxed{PA \cdot PB = PA' \cdot PB'} \qquad (V.\ 3 \cdot 10 \cdot 2 — II)$$

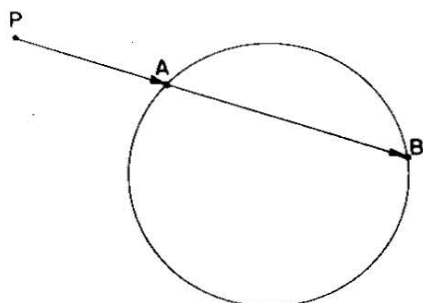
9.2 — TEOREMA

Se P é um ponto exterior a um círculo, $\overline{PAB}$ uma secante qualquer e $\overline{Pr}$ o segmento da tangente traçada deste ponto ao círculo, então $PT^2 = PA \cdot PB$.

Demonstração

Da semelhança dos triângulos PAT e PTB, ou simplesmente notando que $\overline{TA}$ e $\overline{TB}$ ainda são antiparalelas em relação a $\overline{PT}$ e $\overline{PB}$, de acordo com a relação encontrada em 3.10.4 podemos escrever

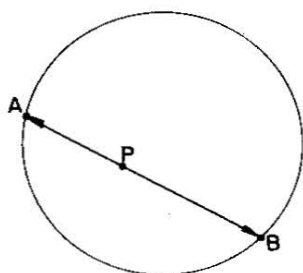
$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

9.3 — DEFINIÇÃO

Se por um ponto P traçarmos uma reta que corte um círculo (O, R) nos pontos A e B, chama-se POTÊNCIA do ponto P em relação ao círculo ao produto escalar $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$* e escreve-se

$$Pot_{(o)} P = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

1.° caso — P é exterior ao círculo.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB \implies$

$$\implies \boxed{Pot_{(o)} P = PA \cdot PB}$$

2.° *caso* — P é interior ao círculo.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB \cdot \cos 180° \implies$

$$\implies \boxed{Pot_{(o)} P = - PA \cdot PB}$$

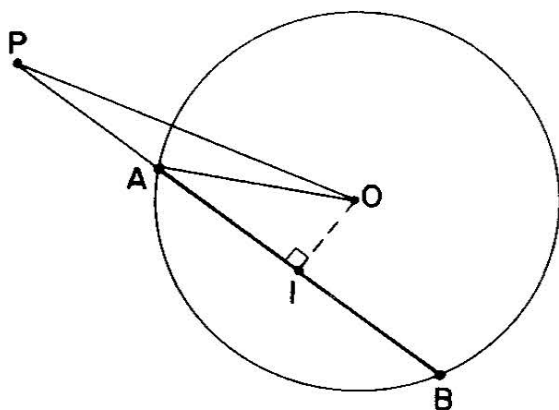
---

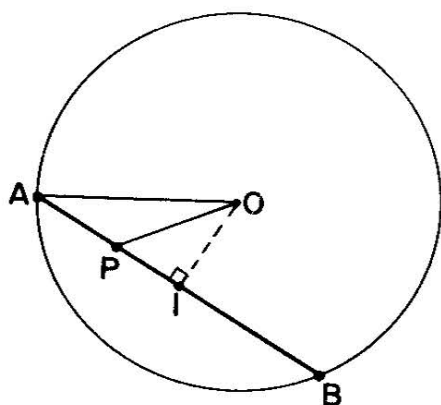
* O produto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ é definido como sendo igual a $PA \cdot PB \cdot \cos \alpha$, sendo α o ângulo que $\overrightarrow{PA}$ forma com $\overrightarrow{PB}$.

Pelas propriedades anteriores, verificamos que o produto $PA \cdot PB$ é sempre constante para qualquer reta que contenha P, sendo função apenas da sua posição em relação ao círculo.

9.4 — TEOREMA

A potência de um ponto P em relação a um círculo pode ser calculada por $d^2 - R^2$, sendo d a distância de P ao centro do círculo e R o raio desse círculo.

Demonstração

1.° caso — P é exterior.

$$PA \cdot PB = (PI - IA)(PI + IA) =$$
$$= PI^2 - IA^2 =$$
$$= (PO^2 - OI^2) -$$
$$- (OA^2 - OI^2) =$$
$$= PO^2 - OA^2 =$$
$$= d^2 - R^2.$$

2.° caso — P é interior.

$$- PA \cdot PB = -(IA - PI)(PI + IA)^* =$$
$$= (PI - IA)(PI + IA) =$$
$$= PI^2 - IA^2 =$$
$$= (PO^2 - OI^2) -$$
$$-(OA^2 - OI^2) =$$
$$= PO^2 - OA^2 =$$
$$= d^2 - R^2.$$

Concluímos, portanto, $\boxed{Pot_{(o)} P = d^2 - R^2}$

* Segmentos não orientados.

Observemos que:

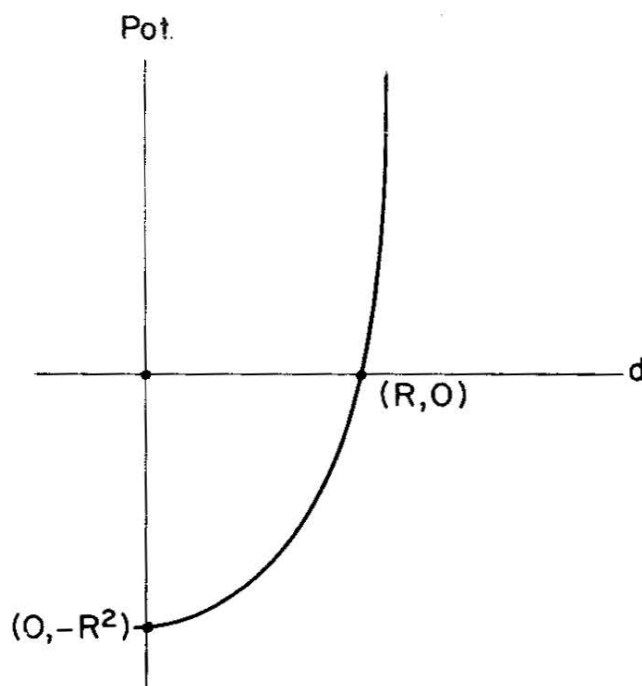
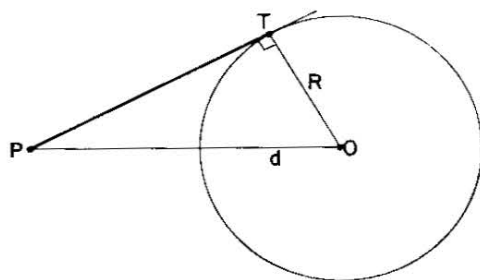
1) Se P é exterior ao círculo, $d > R \Longrightarrow \text{Pot } P > 0$.

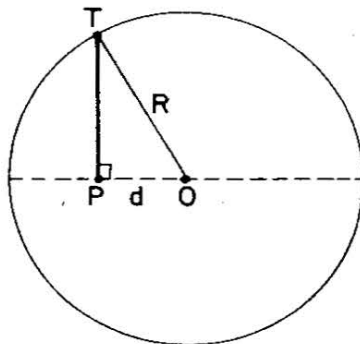
2) Se P pertence ao círculo, $d = R \Longrightarrow \text{Pot } P = 0$.

3) Se P é interior ao círculo, $d < R \Longrightarrow \text{Pot } P < 0$.

4) O centro é o ponto de potência mínima, ou seja, $\text{Pot}_{(o)}\ O = -R^2$.

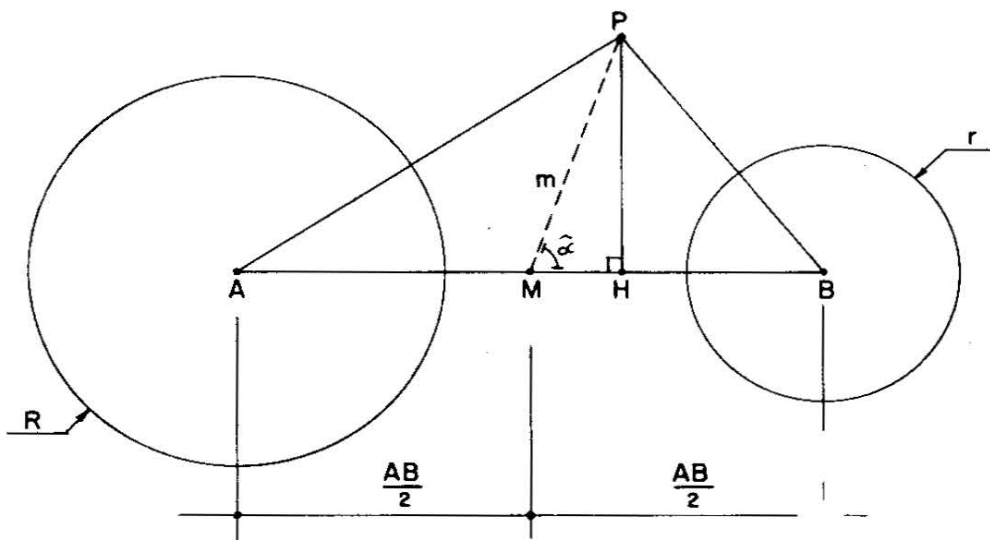
5) Função potência: $(R_+ \rightarrow [-R^2, +\infty)$

$$d \mapsto d^2 - R^2$$

6) Se P é exterior ao círculo,

$$\text{Pot}_{(o)}\ P = PT^2$$

7) Se P é interior ao círculo,

$$Pot_{(o)} P = -PT^2.$$

9.5 — EIXO RADICAL

Chamamos de Eixo Radical de dois círculos ao lugar geométrico dos pontos de igual potência em relação a esses círculos.

Para a pesquisa do lugar, consideremos dois círculos de centros A e B e raios R e r, respectivamente. Consideremos ainda M, médio de $\overline{AB}$, um ponto P deste lugar e sua projeção H sobre $\overline{AB}$.

$$Pot_{(A)} P = Pot_{(B)} P \implies$$

$$\implies PA^2 - R^2 = PB^2 - r^2 \implies$$

$$\implies PA^2 - PB^2 = R^2 - r^2 \qquad (1)$$

$$\Delta\ PMA \rightarrow PA^2 = \frac{AB^2}{4} + m^2 + 2\ \frac{AB}{2}\ m \cos \widehat{\alpha}$$

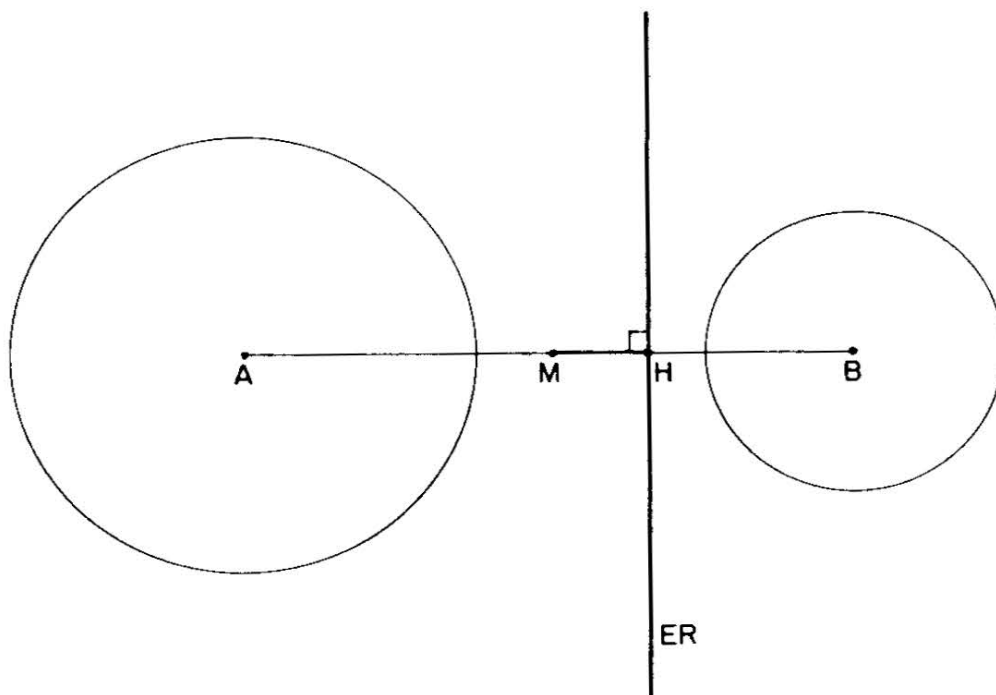
$$\Delta\ PMB \rightarrow PB^2 = \frac{AB^2}{4} + m^2 - 2\ \frac{AB}{2}\ m \cos \widehat{\alpha}.$$

Subtraindo,

$$PA^2 - PB^2 = 2\ AB\ m \cos \widehat{\alpha} \quad \text{e, por} \quad (1),$$

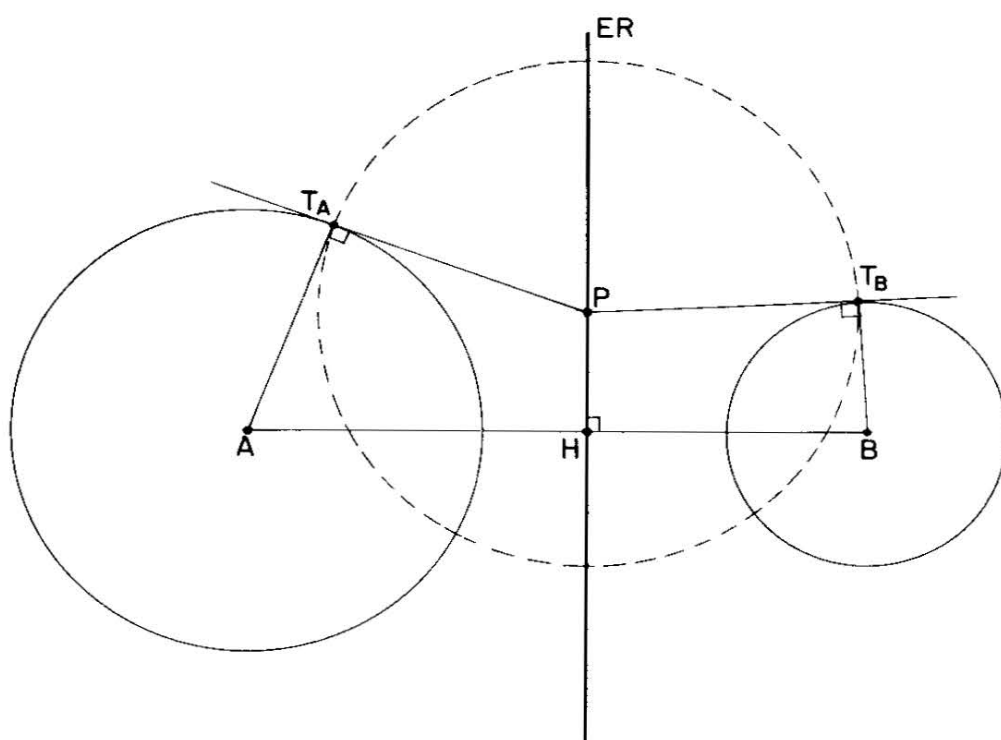
$$R^2 - r^2 = 2 \cdot AB \cdot MH. \quad (2)$$

Vemos que, como $R^2 - r^2$ é constante, $2 \cdot AB \cdot MH$ também o será. Desta última, concluímos que MH é constante, não dependendo das posições de P. Logo, o L. G. procurado é a reta perpendicular a AB, que contém M, cuja posição determinaremos a partir de (2).

$$\boxed{MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB}}$$

Observemos que:

1) O valor MH encontrado deve ser marcado a partir de M em direção ao centro do menor círculo, pois

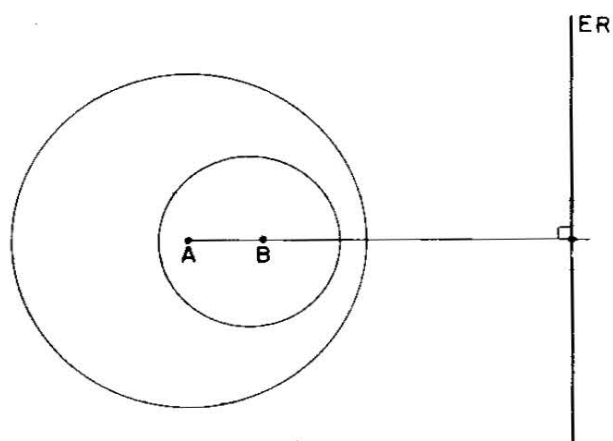
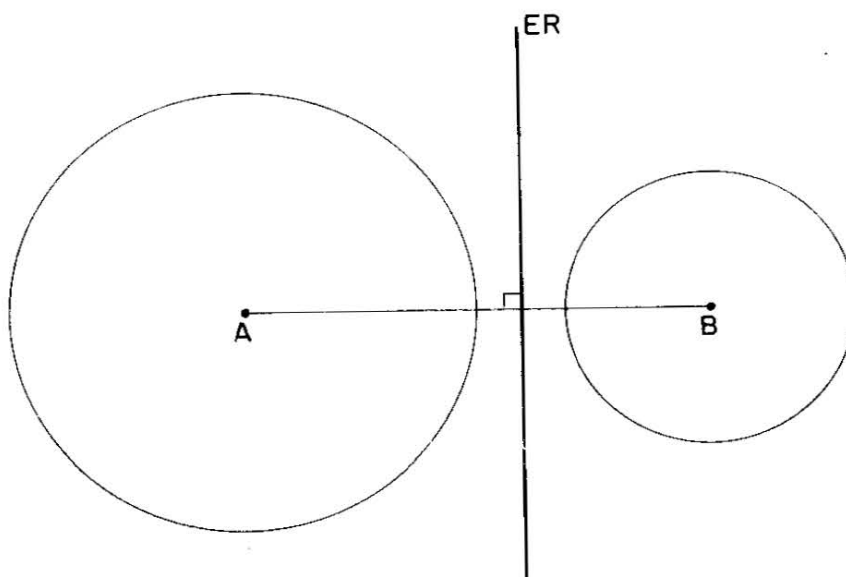
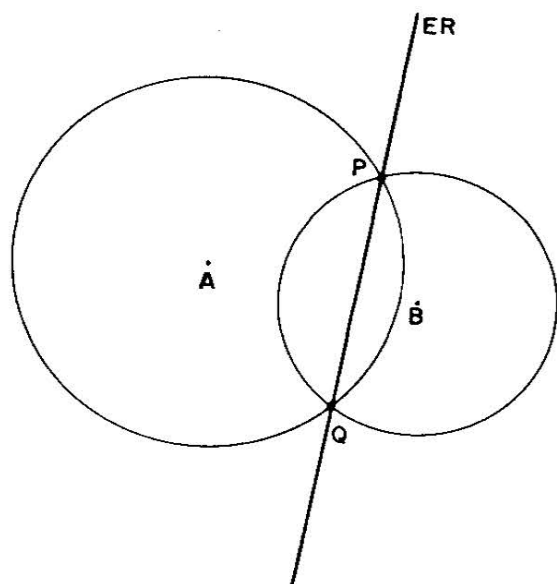
$$R > r \Longrightarrow PA > PB \Longrightarrow HA > HB.$$

2) De qualquer ponto do eixo radical podemos traçar tangentes de mesmo comprimento aos dois círculos.

$$\left.\begin{array}{l} Pot_{(A)}\,P = PT_A^2 \\ Pot_{(B)}\,P = PT_B^2 \\ P \in ER \end{array}\right\} \Longrightarrow PT_A = PT_B$$

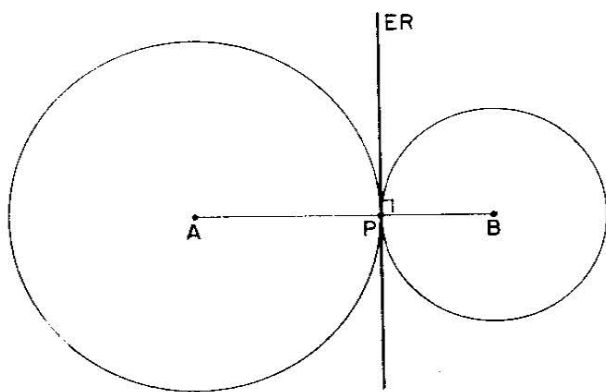
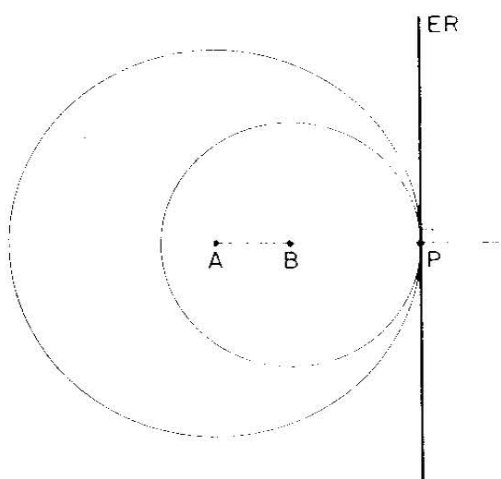
3) O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos dados.

Realmente, pois $PT_A = PB_B$ e

$$A\widehat{T_A}P = B\widehat{T_B}P = 90°.$$

4) Se dois círculos são interiores ou exteriores, o eixo radical não tem ponto comum com nenhum deles.

5) Se dois círculos são secantes, o eixo radical é a reta suporte da corda comum.

$$\left.\begin{array}{l} Pot_{(A)}\, P = Pot_{(B)}\, P = 0 \\ Pot_{(A)}\, Q = Pot_{(B)}\, Q = 0. \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad P, Q \in ER.$$

6) Se dois círculos são tangentes, o eixo radical é a reta tangente comum.

$$\left.\begin{array}{l} Pot_{(A)} P = Pot_{(B)}\, P = 0 \\ ER \perp \overline{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ ER é a tangente comum aos círculos.

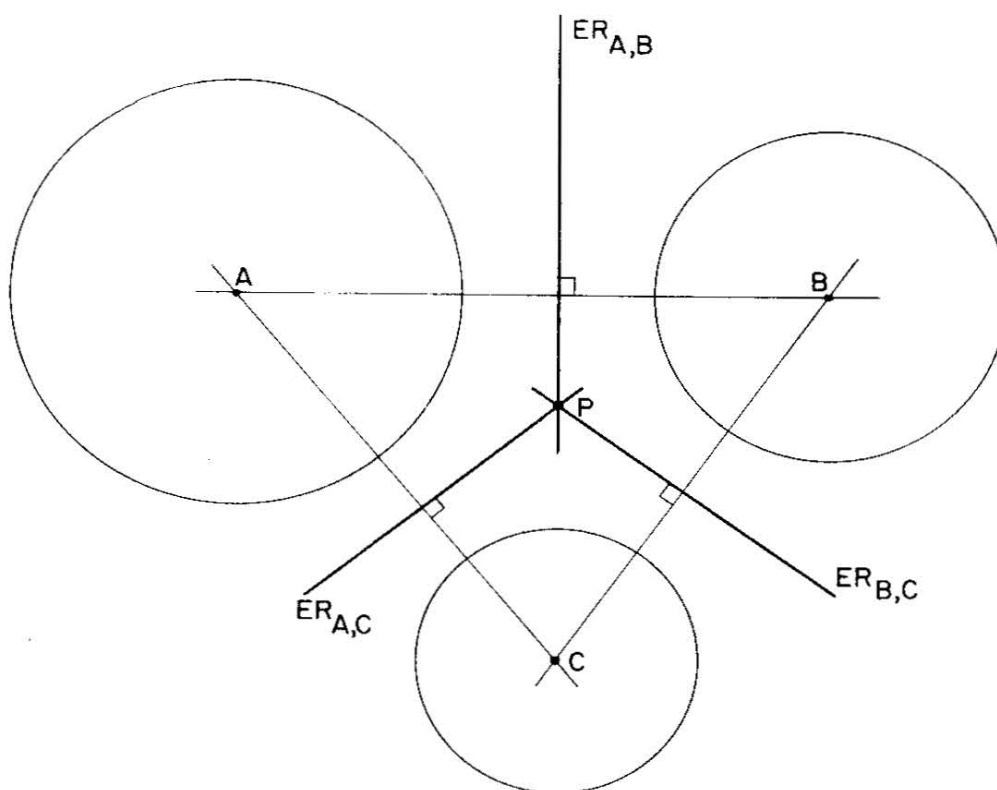
7) Dois círculos concêntricos não possuem eixo radical.

De fato, se lembrarmos que $MH = \dfrac{R^2 - r^2}{2AB}$

temos

$$B \to A \implies \begin{cases} M \to A \\ MH \to \infty \end{cases}$$

9.6 — CENTRO RADICAL

Chamamos de *Centro Radical* de três círculos ao ponto que possui igual potência em relação aos mesmos. Consideremos três círculos de centros A, B e C, não colineares, e os eixos radicais $ER_{A,B}$ e $ER_{B,C}$ que concorrem em P.

$$P \in ER_{A,B} \implies Pot_{(A)}\,P = Pot_{(B)}\,P$$

$$P \in ER_{B,C} \implies Pot_{(B)}\,P = Pot_{(C)}\,P$$

Portanto,

$$Pot_{(A)}\ P = Pot_{(C)}\ P, \text{ ou seja, } P \in ER_{A,\,C}.$$

O ponto P é, então, o *Centro Radical.*

Observemos ainda que:

1) O centro radical é o único ponto de onde se pode traçar tangentes de mesmo comprimento aos três círculos.

2) O centro radical é o centro do único círculo ortogonal aos três círculos dados.

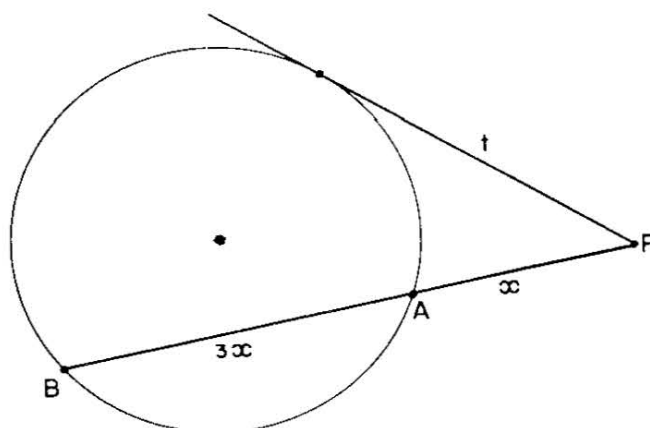
9.7 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

319. Calcule na figura o comprimento da tangente traçada de P ao círculo.

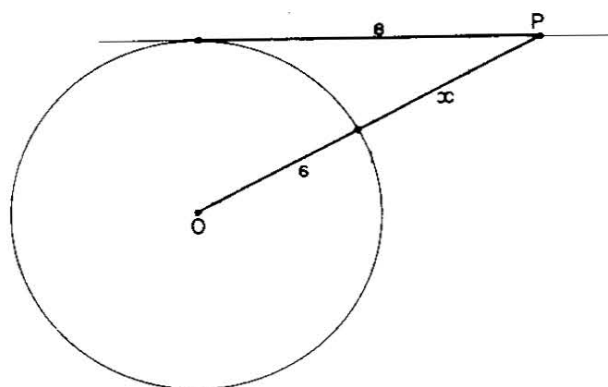
Solução

$t^2 = PA \cdot PB$, onde

$PA = x$ e

$PB = 4x$

Logo, $t^2 = x \cdot 4x = 4x^2 \Longrightarrow t = 2x$

Resposta: $2x$

320. Calcule x na figura.

Solução

$$\text{Pot}_{(O)} P = d^2 - R^2 = (6 + x)^2 - 6^2 = t^2 = 8^2.$$

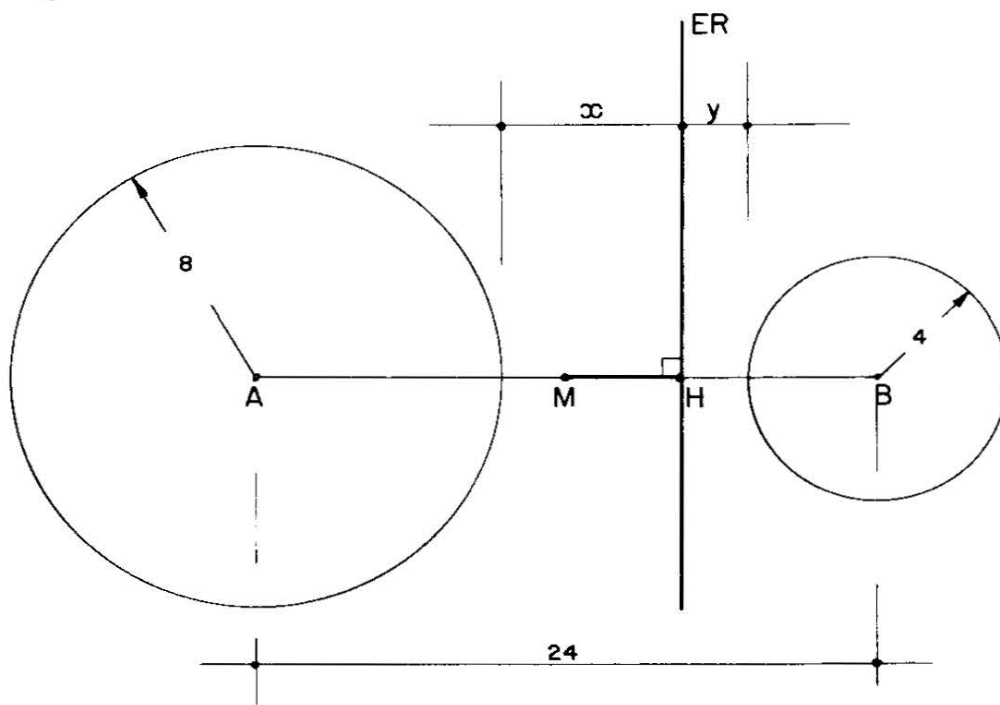
$$36 + 12x + x^2 - 36 = 64$$

$$x^2 + 12x - 64 = 0 \implies$$

$$\implies x = -16 \text{ (não serve)}$$

$$x = 4$$

Resposta: $x = 4$

321. Determine as distâncias do eixo radical a cada um dos círculos da figura.

Solução

Chamemos de x e y as distâncias procuradas e seja M médio de $\overline{AB}$. Temos

$$MH = \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot AB} \implies$$

$$\implies MH = \frac{8^2 - 4^2}{2 \cdot 24} = 1.$$

Então,

$$x = AM + MH - R$$

$$x = 12 + 1 - 8 = 5$$

$$y = AM - MH - r$$

$$y = 12 - 1 - 4 = 7$$

Respostas: $x = 5$

$y = 7.$

322. Considerando a figura do problema anterior, determine, dos pontos que possuem igual potência em relação aos dois círculos, aquele cuja potência é mínima e calcule esse valor.

Solução

Se as potências são iguais, o ponto pertence ao eixo radical dos dois círculos e se o valor da potência é mínimo, o ponto procurado é o ponto H da figura do problema 321, pois a distância a qualquer dos centros é mínima. Calcularemos a potência de H em relação a cada um dos círculos.

Do problema anterior, temos

$$AH = 13 \quad \text{e} \quad BH = 11.$$

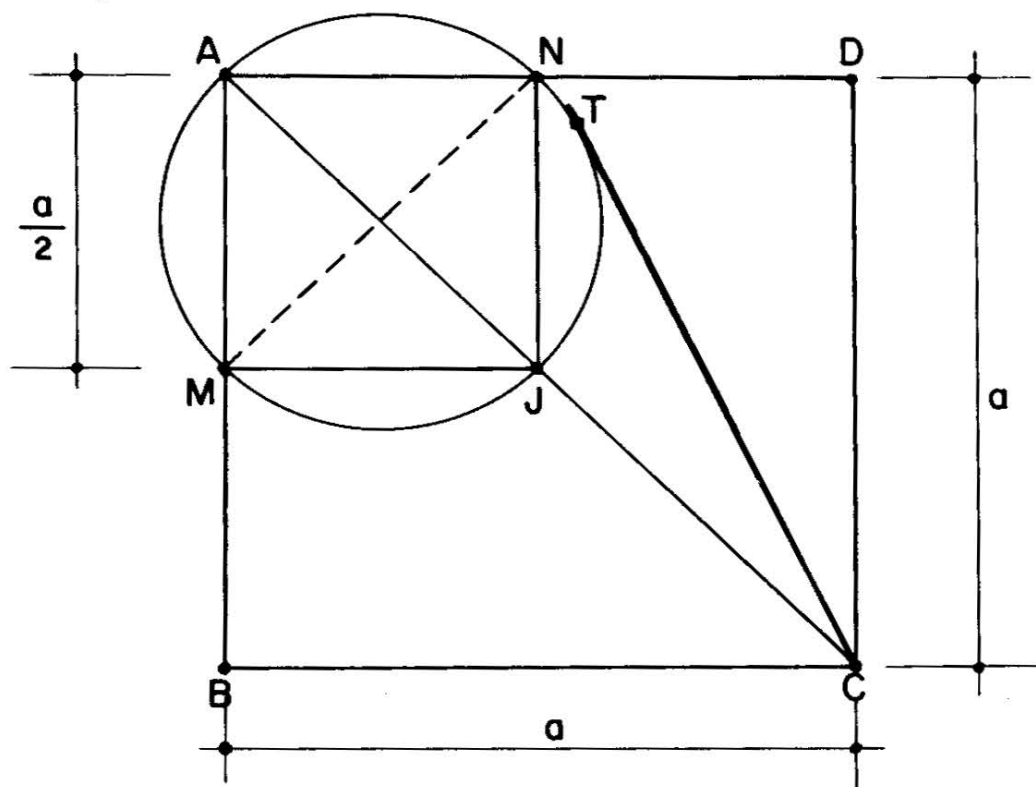
Então,

$$Pot_{(A)}\, H = AH^2 - R^2 = 13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$$

$$Pot_{(B)}\, H = BH^2 - r^2 = 11^2 - 4^2 = 121 - 16 = 105.$$

Resposta: $Pot_{(A)}\, H = Pot_{(B)}\, H = 105.$

323. Considere o círculo que passa pelo ponto A de um quadrado ABCD e pelos pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Prove que a

tangente a esse círculo traçada por c tem comprimento igual ao lado do quadrado.

Solução

Consideremos a figura. Verificamos imediatamente que $\overline{MN}$ e $\overline{AJ}$ são diâmetros e, conseqüentemente, AMJN é um quadrado de lado $\frac{a}{2}$. Então,

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$MJ = \frac{a}{2}$$

$$AJ = CJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$CT^2 = CJ \cdot CA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2 \implies CT = a.$$

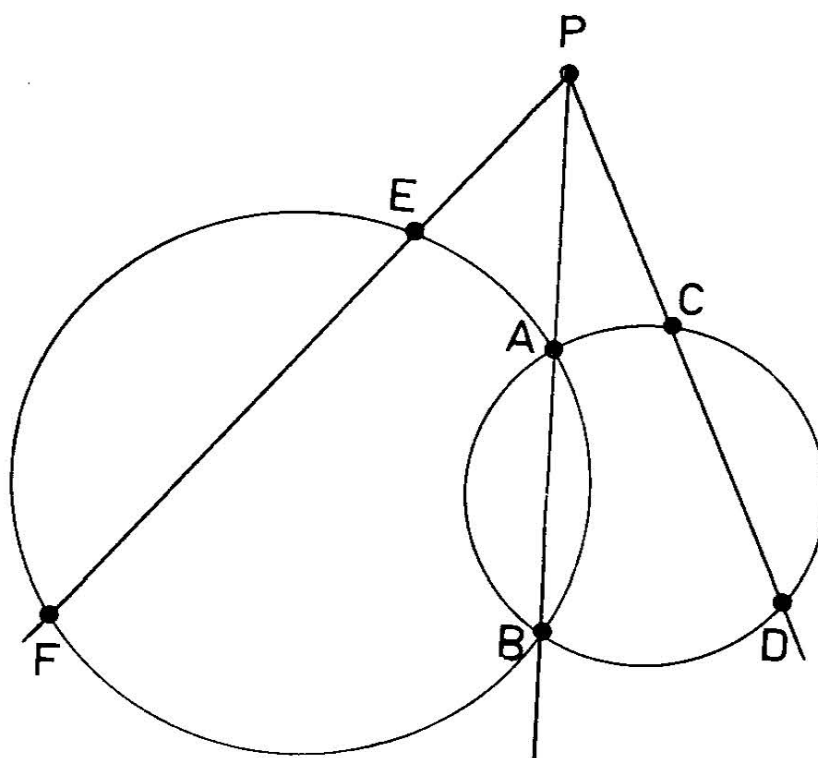
324. Calcule x na figura

sendo

$PC = 4$

$CD = 5$

$PE = 2$

$EF = x$.

Solução

Como P pertence ao eixo radical dos círculos, P possui potências iguais em relação a ambos. Então,

$$PC \cdot PD = PE \cdot PF \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4 \cdot 9 = 2\,(2 + x) \quad \Longrightarrow \quad x = 16.$$

Resposta: 16

325. Pelo ponto M médio do arco AB de um círculo traça-se uma corda $\overline{MD}$ que é concorrente com $\overline{AB}$ em C. Demonstre que MA é tangente ao círculo que passa por A, C e D.

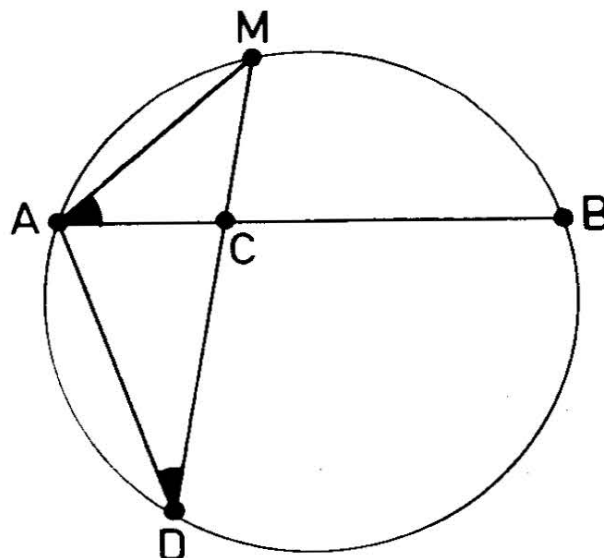
Solução

Considerando os triângulos MAC e MDA da figura, temos

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{MB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = \widehat{D}.$$

Então, $\Delta\, MAC \sim \Delta\, MDA$

$$\Longrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow MA^2 = MC \cdot MD$, o que mostra que $\overline{MA}$ é tangente em A ao círculo que passa por A, C e D

PROBLEMAS PROPOSTOS

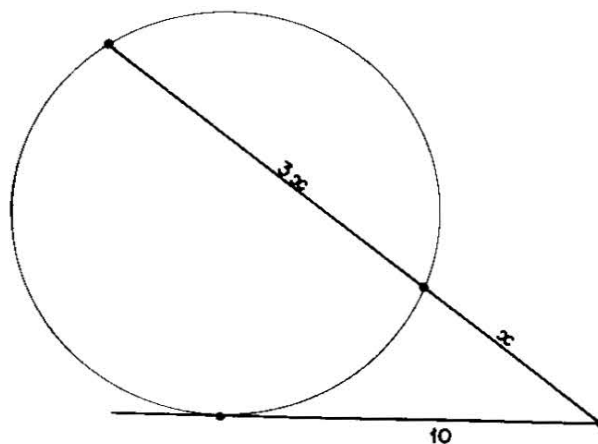
326. Calcule x na figura.

A) 8

B) 6

C) 5

D) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

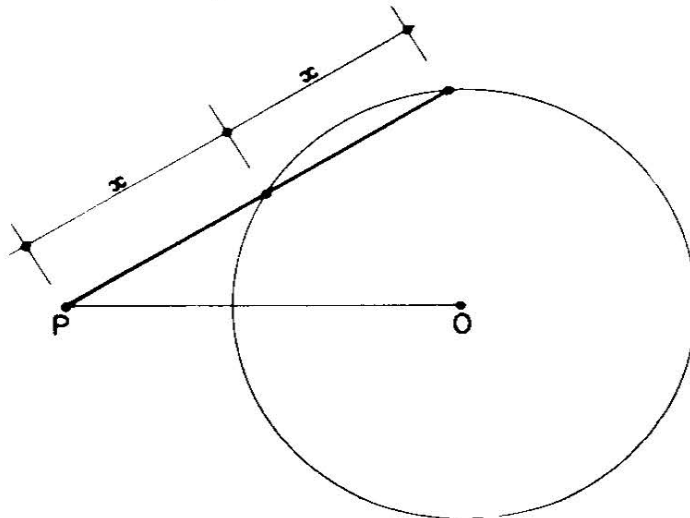
E) NRA.

327. Na figura, calcule x sendo o raio do círculo igual a 4 e PO = 6.

A) $\sqrt{10}$

B) $\sqrt{13}$

C) $\sqrt{15}$

D) $\sqrt{17}$

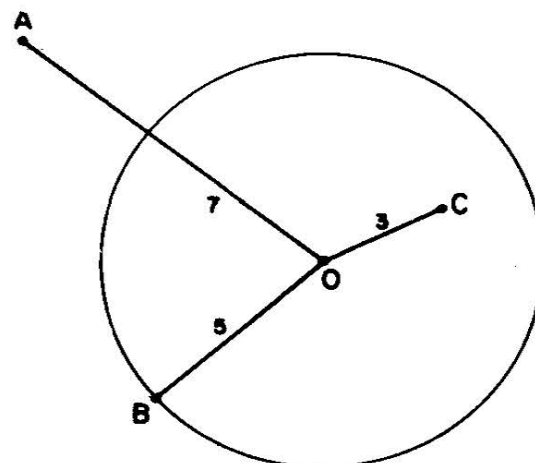
E) NRA.

328. Considere o círculo da figura. Então, $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B + Pot_{(O)}C$ vale:

A) 8

B) 9

C) 33

D) 83

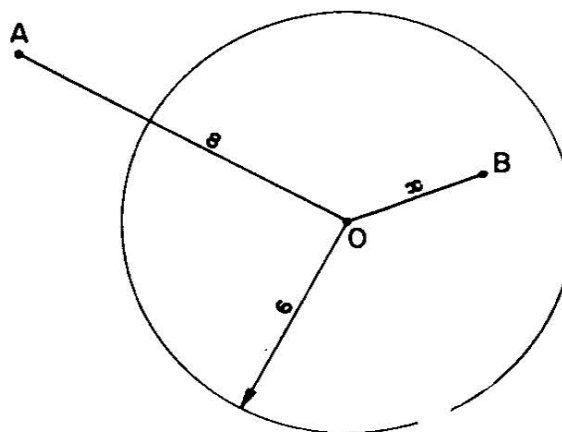
E) NRA.

329. Calcule x para que $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B = 0$.

A) 2

B) 3

C) $2\sqrt{2}$

D) impossível

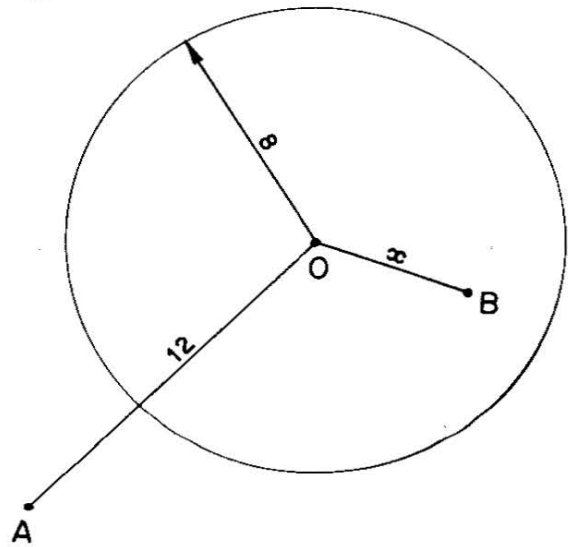
E) NRA.

330. Calcule x para que $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B = 0$.

A) 0

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) impossível

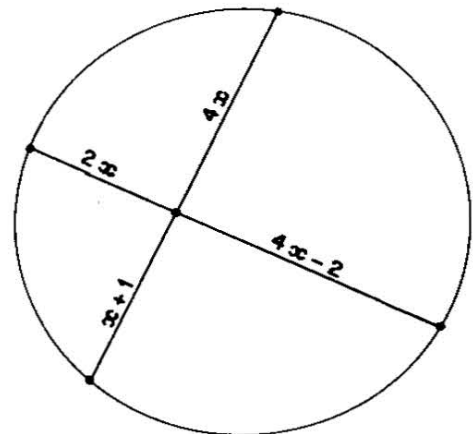
E) NRA.

331. Calcule x na figura.

A) $\frac{1}{2}$

B) 1

C) 2

D) $\frac{5}{2}$

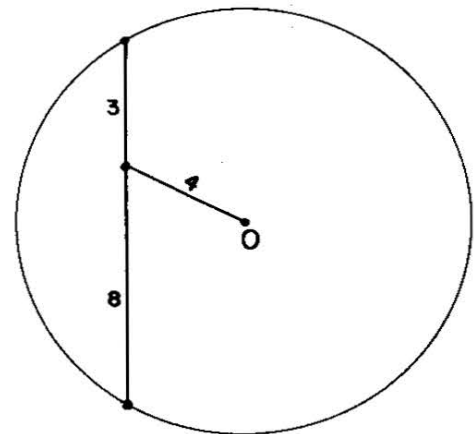
E) 3

332. Calcule o raio do círculo da figura.

A) $\sqrt{10}$

B) $2\sqrt{10}$

C) $3\sqrt{10}$

D) impossível

E) NRA.

333. Em um círculo, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e cortam-se em I. Traça-se por I uma perpendicular a $\overline{AD}$ que corta o círculo em E e G e $\overline{AD}$ em F. (F entre I e G). Se AF = 4, FD = 9 e FG = 5, então EI mede:

A) 1

B) $\frac{6}{5}$

C) $\frac{8}{5}$

D) $\frac{7}{6}$

E) NRA.

334. Seja P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio R e tal que $OP = R\sqrt{3}$. Traça-se por P a secante PAB ao círculo. Se PA = R, AB é igual a:

A) R

B) $\frac{R}{2}$

C) $R\sqrt{2}$

D) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

E) NRA.

335. Se a distância de um ponto ao centro de um círculo aumenta de 10%, a sua potência em relação a esse círculo aumenta de:

A) 10%

B) 20%

C) não é possível calcular

D) 100%

E) 21%

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 336 E 337

Dois círculos de centros A e B e raios 12 e 8 são tais que AB = 20.

336. A distância de A ao eixo radical desses círculos é:

A) 19

B) 20

C) 21

D) 29

E) NRA.

337. O valor da menor potência que um ponto pode possuir em relação aos dois círculos é:

A) 156

B) 189

C) 204

D) 297

E) NRA.

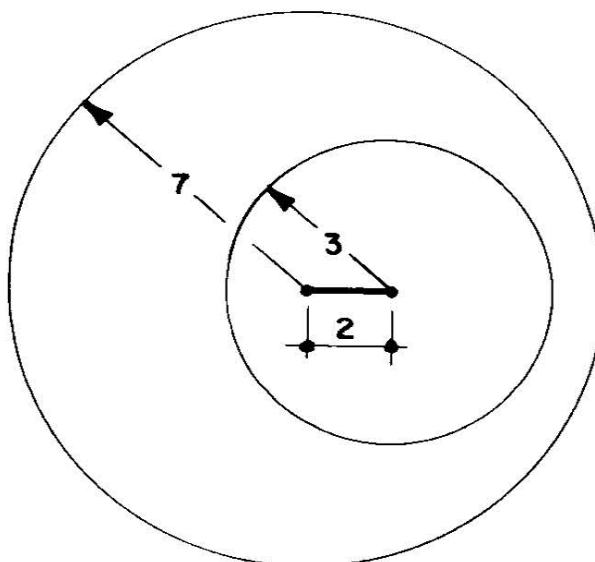
338. A distância do eixo radical dos dois círculos ao maior deles é:

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 10

339. Num triângulo ABC, a ceviana $\overline{AD}$ encontra o círculo circunscrito em E. Se AB = 5, AC = 4, BC = 6 e BD = 4, então $\overline{DE}$ mede:

A) $\sqrt{11}$

B) $\sqrt{7}$

C) $\dfrac{8}{11}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

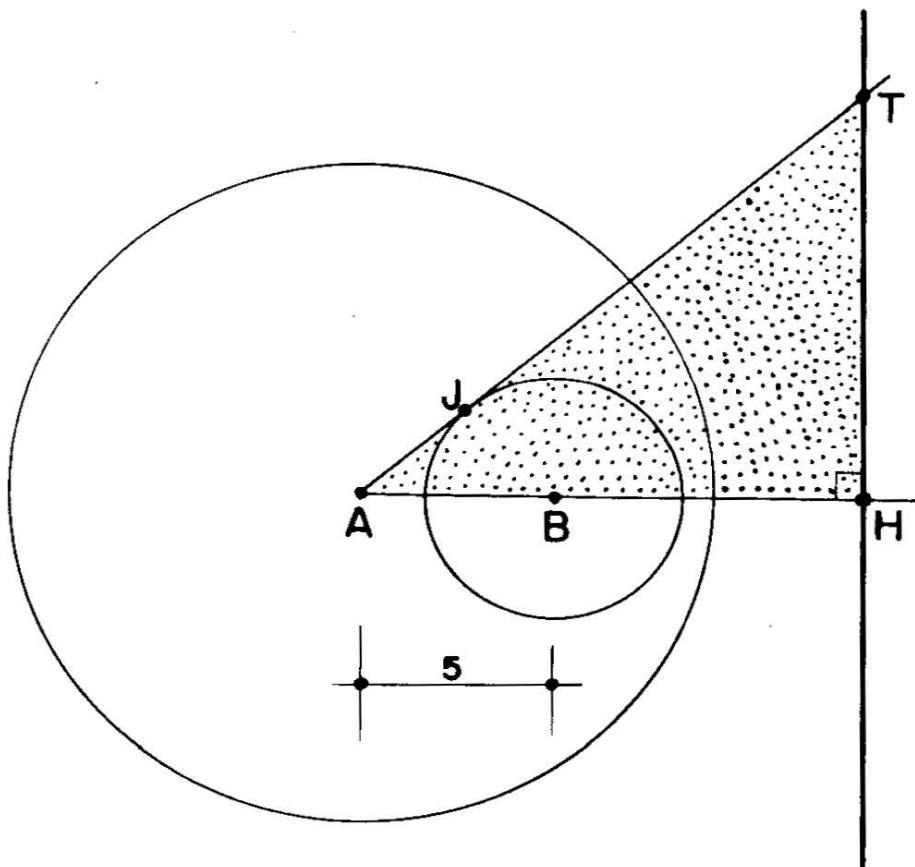
340. Considere os círculos da figura de raios 10 e 4 e seu eixo radical. Se $\overline{OT}$ é tangente em J ao círculo menor, calcule a área do triângulo ATH.

A) $\frac{11.881}{150}$

B) $\frac{12.773}{133}$

C) $\frac{11.166}{161}$

D) $\frac{11.227}{100}$

E) $\frac{11.655}{182}$

ENUNCIADO RELATIVO ÀS QUESTÕES 341 E 342

Seja P um ponto de um círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e seja $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{AB}$. O círculo de diâmetro $\overline{PC}$ encontra o primeiro em E e a reta PE corta AB em M. Sabe-se que AB = 16 e MA = 2.

341. MC mede:

A) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$

E) 6

342. PC mede:

A) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

E) 4

343. Dois círculos de raios 3 e 4 são ortogonais. Calcule a distância de um ponto P à reta que contém os centros sabendo que ele possui potência igual a 16 em relação aos dois círculos.

A) $\sqrt{34}$

B) $\frac{5}{4}\sqrt{34}$

C) $\frac{4}{5}\sqrt{34}$

D) $\frac{3}{5}\sqrt{34}$

E) NRA.

344. As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo são perpendiculares e cortam-se em I. Se $AI = 4$, $IB = 6$ e $CI = 3$, calcule o diâmetro deste círculo.

A) 5

B) $5\sqrt{2}$

C) $5\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{5}$

E) NRA.

345. Sendo $\overline{AD}$ a bissetriz interna do ângulo A do triângulo ABC, prove que $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

346. É dado um triângulo isósceles ABC, inscrito em um círculo, e um ponto M do prolongamento da base $\overline{BC}$ do triângulo. Prove que $MA^2 = AB^2 - MB \cdot MC$.

347. Os segmentos das tangentes traçadas de P a dois círculos distintos não concêntricos são congruentes. Determine o lugar geométrico de P.

348. O ângulo entre as tangentes traçadas de P ao círculo A é o mesmo ângulo formado pelas tangentes traçadas deste ponto ao círculo B. Determine o lugar geométrico de P.

349. Prove que, se uma secante a dois círculos ortogonais passa pelo centro de um deles, os quatro pontos de interseção formam uma divisão harmônica.

350. (IME — 67). Dois círculos exteriores possuem diâmetros 2 e 10 e seu eixo radical dista 5 de um deles. Pede-se:

a) O comprimento da tangente comum externa.

b) Sendo P o ponto em que o ER corta a tangente comum externa e O e O' os centros dos dois círculos, determinar a área do triângulo POO'.

CAPÍTULO 10

POLÍGONOS REGULARES

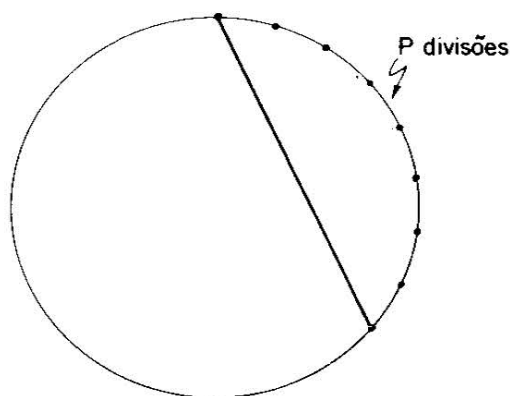
10.1 — DEFINIÇÃO

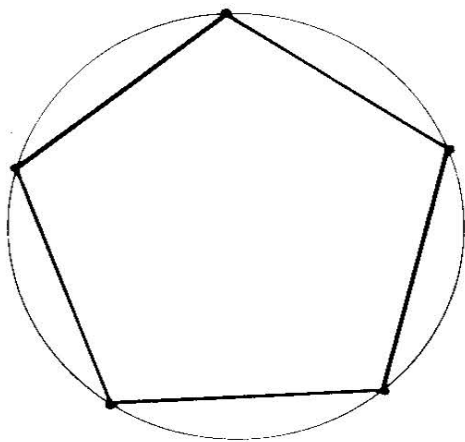
Polígono regular é todo polígono que possui lados congruentes e ângulos também congruentes. Verificamos, ainda, que todo polígono regular é inscritível e circunscritível.

10.2 — CONSTRUÇÃO

Consideremos um círculo dividido em *n* partes iguais.

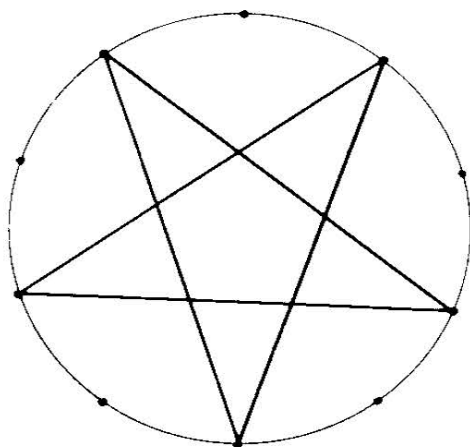
A partir de um determinado ponto de divisão traçaremos cordas consecutivas, congruentes, correspondentes a *p* divisões. Então, cada corda determina um arco

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{360°}{n} \cdot p$$

Esta operação será repetida, até que voltemos ao ponto de partida. O polígono obtido terá, então, gênero *g*, e para seu fechamento necessitamos dar *k* voltas no círculo. Ao número k chamamos de espécie do polígono. Se $k = 1$, o polígono é ***convexo*** e se $k > 1$, o polígono é *estrelado*.

Exemplos:

divisões do círculo: $n = 5$
construção: $p = 1$ ⟹

⟹ gênero do polígono: $g = 5$
espécie: $k = 1$

divisões do círculo: $n = 8$
construção: $p = 3$ ⟹

⟹ gênero do polígono: $g = 8$
espécie: $k = 3$

divisões do círculo: $n = 10$
construção: $p = 4$ ⟹

⟹ gênero do polígono: $g = 5$
espécie: $k = 2$

Verificamos que:

a) O arco correspondente a um lado mede $\frac{360^\circ}{n} \cdot p$

b) A soma dos g arcos é igual a $360^\circ \cdot k$, sendo k o número de voltas necessárias para o fechamento do polígono (espécie do polígono).

Então,

$$\frac{360^\circ}{n} \cdot p \cdot g = 360^\circ \cdot k \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{g = \frac{n}{p} \cdot k}$$, sendo k o menor inteiro positivo que torna inteira a expressão $\frac{nk}{p}$.

c) Quando $p = 1$ e $k = 1$, o polígono obtido é convexo de gènero n, como no primeiro exemplo.

d) Quando n e p são primos entre si, temos $k = p$ e $g = n$, como no segundo exemplo.

e) Quando n é múltiplo de p, temos

$$\frac{n}{p} = n' \quad e \quad g = n'k$$

Então, $k = 1$ e $g = \frac{n}{p}$, sendo o polígono convexo de gênero $\frac{n}{p}$.

Seria este o caso se dividíssemos um círculo em 8 partes e uníssemos os pontos de dois em dois, obtendo assim um quadrado.

f) Quando n e p admitem fatores comuns, temos

$$\frac{n}{p} = \frac{n'}{p'}, \text{ sendo } n' \text{ e } p' \text{ primos entre si.}$$

Então, como $g = \frac{n'}{p'} \cdot k$, concluímos que $k = p'$ e $g = n'$, sendo o polígono estrelado de gênero $n' < n$, como no terceiro exemplo.

Observação

Consideremos $p < \frac{n}{2}$ pois, unindo os n pontos de divisão de p em p ou de n — p em n < p, obteremos o mesmo polígono.

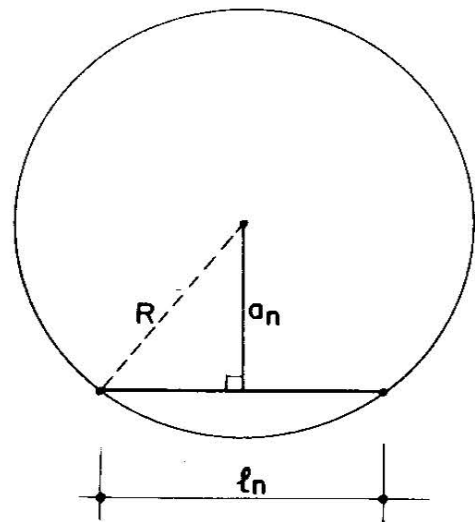
10.3 — LADO E APÓTEMA

Seja l_n^p uma corda de um círculo correspondente a p divisões de um círculo que está dividido em *n* partes. Assim, l_8^1 ou simplesmente l_8 é o lado do octógono convexo, l_{10}^3 o lado do decágono estrelado de espécie 3.

Vemos, ainda, que, por exemplo, l_{20}^4 é o correspondente ao lado do pentágono convexo ($l_{20}^4 = l_5^1$) e l_{14}^4 é correspondente ao lado do heptágono estrelado de espécie 2 (pois $l_{14}^4 = l_7^2$).

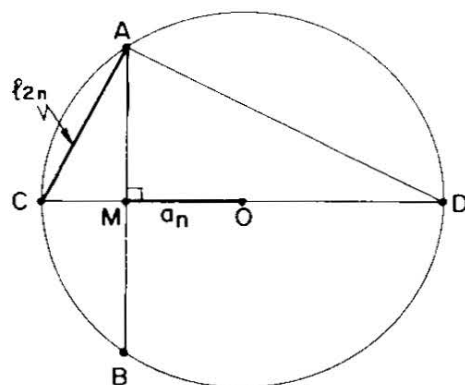
Chamamos de *apótema* de um polígono regular à distância do centro do círculo circunscrito a um dos lados.

Se p e n são primos entre si, e $p < \frac{n}{2}$, l_n^p é o lado do polígono de gênero n e espécie p, a_n^p é o apótema desse polígono. Se um polígono de gênero n está inscrito em um círculo de raio R, temos

$$R^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \quad \text{ou}$$

$$a_n = \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}$$

10.4 — DUPLICAÇÃO DO GÊNERO DE UM POLÍGONO CONVEXO

Se l_n é o lado do polígono regular convexo de gênero n, inscrito em um círculo de raio R, calcularemos l_{2n}, que é o lado do polígono regular de gênero 2n inscrito no mesmo círculo.

Seja $AB = l_n$ e o diâmetro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$. Como $\widehat{AC} = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$, então $AC = l_{2n}$.

Do triângulo retângulo ACD vem

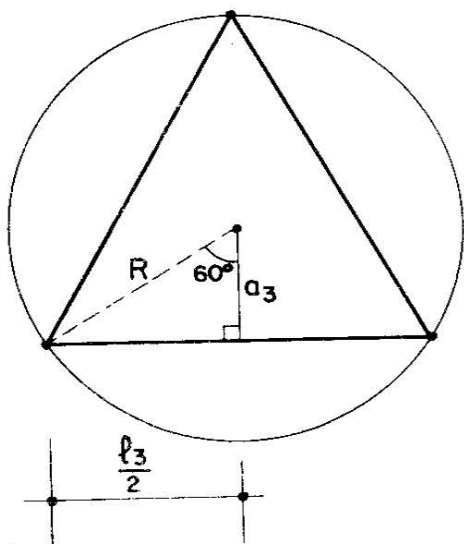
$$AC^2 = CM \cdot CD$$

$$(l_{2n})^2 = 2R \cdot \overbrace{(R - a_n)}$$

$$(l_{2n})^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}\right) \implies$$

$$\implies \quad l_{2n} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}}\right)}$$

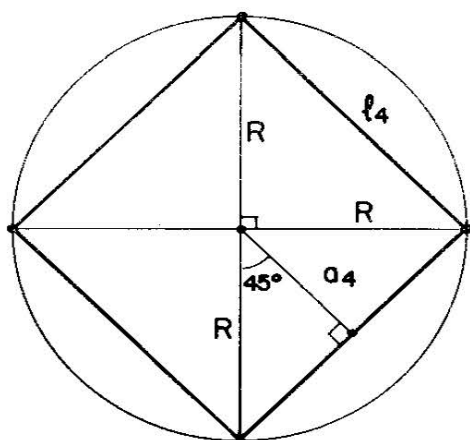
10.5 — CÁLCULO DOS LADOS DOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NUM POLÍGONO DE RAIO R

1 — Triângulo equilátero (n = 3)

$$\frac{l_3}{2} = R \operatorname{sen} 60^\circ \implies$$

$$\implies \boxed{l_3 = R\sqrt{3}}$$

$$a_3 = R \cos 60^\circ \implies$$

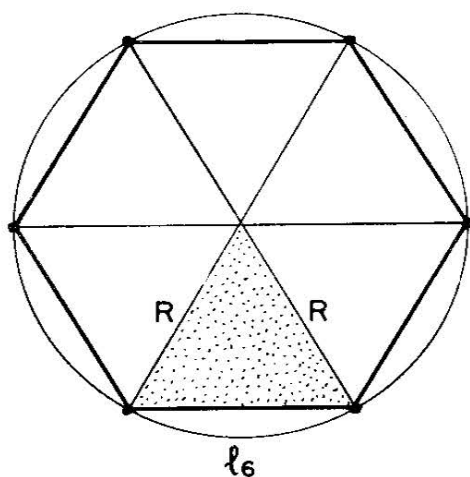
$$\implies \boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$

2 — Quadrado (n = 4)

$$(l_4)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$\boxed{l_4 = R\sqrt{2}}$$

$$a_4 = R \cos 45^\circ \implies$$

$$\implies \boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

3 — Hexágono (n = 6, p = 1)

Como o hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes, temos

$$\boxed{l_6 = R}$$

$$\boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

Observação

$n = 6$, $p = 2$ forma um triângulo equilátero.

4 — Octógono convexo ($n = 8$, $p = 1$)

Pela fórmula da duplicação, vamos obter l_8 em função de l_4, cujo valor conhecemos.

$$l_8 = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}}\right)} \implies$$

$$\implies \boxed{l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Para o apótema, temos

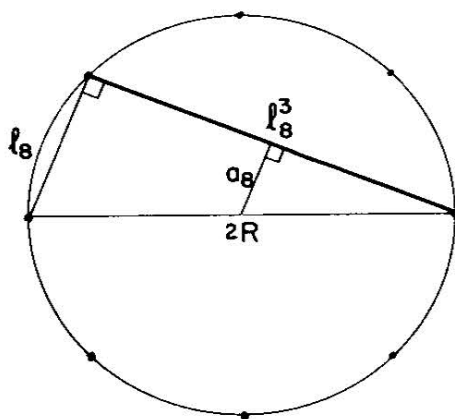
$$a_8 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{2})}{4}} \implies$$

$$\implies a_8 = \sqrt{\frac{R^2(4 - 2 + \sqrt{2})}{4}} \implies$$

$$\implies \boxed{a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Observação

$n = 8$, $p = 2$ forma um quadrado.

5 — Octógono estrelado ($n = 8$, $p = 3$)

$$(l_8^3)^2 = (2R)^2 - (l_8)^2$$

$$= 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2})$$

$$= R^2(4 - 2 + \sqrt{2}) \implies$$

$$\implies \boxed{l_8^3 = R^2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Notamos ainda que

$$a_8^3 = \frac{l_8}{2}\ ;\ \text{logo,}$$

$$\boxed{a_8^3 = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

6 — Dodecágono convexo ($n = 12$, $p = 1$)

Novamente pela fórmula da duplicação a partir de $l_6 = R$, temos

$$l_{12} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}\right)} \implies$$

$$\implies \boxed{l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

E, para o apótema,

$$a_{12} = \sqrt{R^2 - \frac{R\ (2-\sqrt{3})}{4}} \implies$$

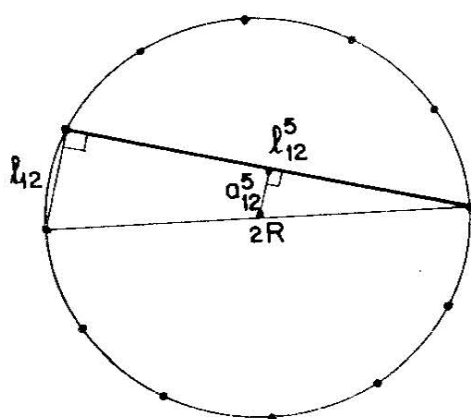
$$\implies \boxed{a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Observações

$n = 12$, $p = 2$ forma um hexágono regular

$n = 12$, $p = 3$ forma um quadrado

$n = 12$, $p = 4$ forma um triângulo equilátero

7 — Dodecágono estrelado (n = 12, p = 5)

$$(l_{12}^5)^2 = (2R)^2 - (l_{12})^2 =$$

$$= 4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3}) =$$

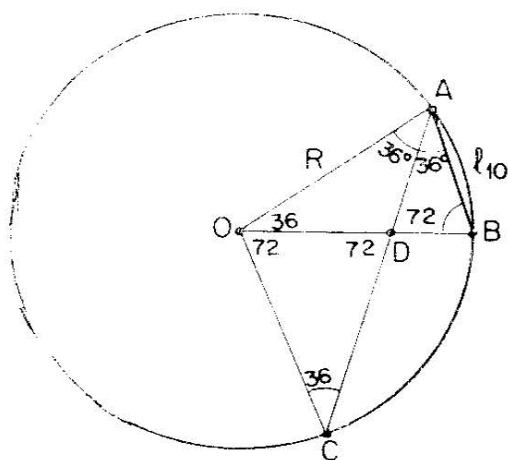
$$= R^2(4 - 2 + \sqrt{3}) \implies$$

$$\implies \boxed{l_{12}^5 = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Notamos ainda que

$a_{12}^5 = \dfrac{l_{12}}{2}$; logo,

$$\boxed{a_{12}^5 = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

8 — Décagono convexo (n = 10, p = 1)

Na figura, onde $\widehat{O} = 36°$, $AB = l_{10}$ e $\overline{AD}$ é bissetriz de $\widehat{A}$, temos

$$AD = OD = l_{10}$$

$$DB = R - l_{10}.$$

Pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{R}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{R - l_{10}} \implies$$

$$\implies (l_{10})^2 + R\,l_{10} - R^2 = 0 \implies$$

$$\implies \boxed{l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

9 — Decágono estrelado (n = 10, p = 3)

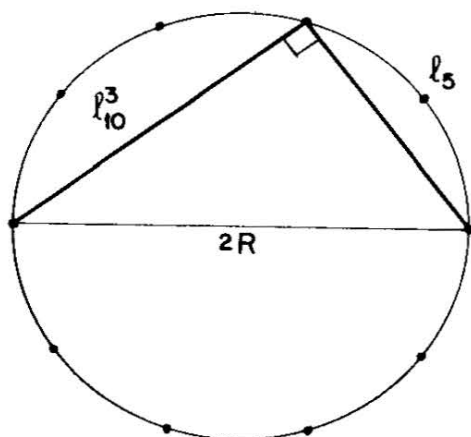
O lado do decágono estrelado l_{10}^3 compreende um arco de $3 \times 36° = 108°$. Assim, na figura anterior, $AC = l_{10}^3$. Mas o triângulo ODC é isósceles e assim

$$DC = R \text{ e } AD = l_{10}$$

Então,
$$l_{10}^3 - l_{10} + R$$

$$l_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) + R \implies$$

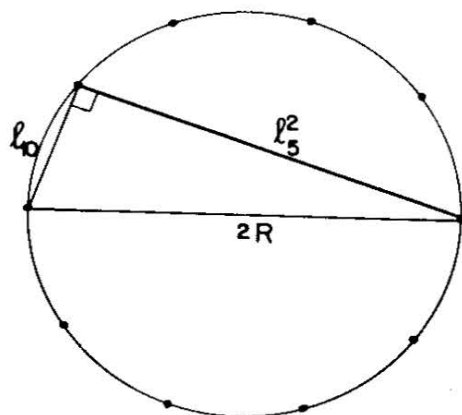
$$\implies \boxed{l_{10}^3 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)}$$

10 — Pentágono convexo (n = 10, p = 2)

$$(l_5)^2 = (2R)^2 - (l_{10}^3)^2$$

$$(l_5)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$$

$$(l_5)^2 = \frac{R^2(16 - 6 - 2\sqrt{5})}{4} \implies$$

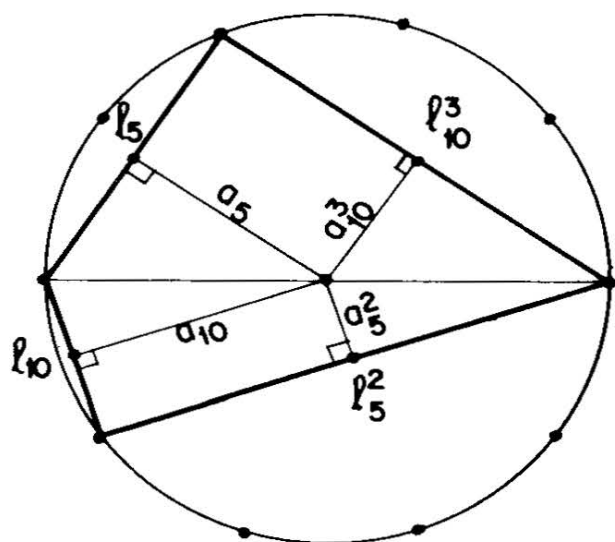
$$\implies \boxed{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

11 — Pentágono estrelado (n = 10, p = 4)

$$(l_5^2)^2 = (2R)^2 - (l_{10})^2$$

$$(l_5^2)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2$$

$$(l_5^2)^2 = \frac{R^2(16 - 6 + 2\sqrt{5})}{4} \implies$$

$$\implies \boxed{l_5^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Para o cálculo dos apótemas dos decágonos e pentágonos, observemos a figura abaixo.

Vemos que

$$a_5 = \frac{l_{10}^3}{2}$$

$$a_5^2 = \frac{l_{10}}{2}$$

$$a_{10} = \frac{l_5^2}{2}$$

$$a_{10}^3 = \frac{l_5}{2}$$

10.6 — COMPRIMENTO DO CÍRCULO

Demonstraremos, inicialmente, que os comprimentos de dois círculos são proporcionais a seus diâmetros.

Demonstração

Sejam dois círculos de comprimentos C e C′ e raios R e R′. Seja x um segmento tal que

$$x = \frac{R'}{R} \cdot C$$

Consideremos dois polígonos regulares convexos semelhantes inscritos nos dois círculos. Podemos escrever

$$\frac{l_n}{l'_n} = \frac{R}{R'}$$

Como $n \cdot l_n = 2p$ e $n \cdot l'_n = 2p'$, temos

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{R}{R'}$$

mas, por (1), temos

$$\frac{R}{R'} = \frac{C}{x}$$

e então

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{C}{x}$$

ou

$$x = \frac{C}{2p} \cdot 2p'$$

Como a relação $\frac{C}{2p}$ é maior que a unidade, $x > 2p'$. Analogamente, circunscrevendo dois polígonos regulares semelhantes de perímetros $2P$ e $2P'$, temos

$$\frac{2P}{2P'} = \frac{C}{x} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{C}{2P} \cdot 2P'.$$

Como a relação $\frac{C}{2P}$ é menor que a unidade, $x < 2P'$.

Vemos que x está compreendido sempre entre $2p'$ e $2P'$.

Quando o número de lados cresce indefinidamente, $x = C'$. Voltando, então, em (1), temos

$$C' = \frac{R'}{R} \cdot C \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} = \text{cte}}$$

Naturalmente que é constante a relação entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro. Chamamos essa constante de π. Então,

$$\frac{C}{2R} = \pi \Longrightarrow \boxed{C = 2\pi R}$$

Para que possamos ter uma idéia do número π, construímos uma tabela, utilizando perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos divididos por 2R. Os lados desses polígonos foram obtidos pela fórmula da duplicação do gênero, a partir do hexágono regular.

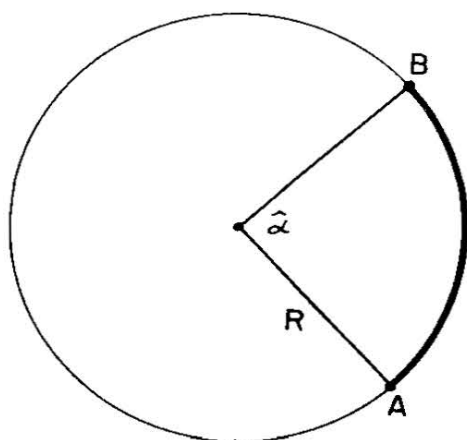
Sejam

n = n.º de lados do polígono
$2p$ = perímetros dos polígonos inscritos
$2P$ = perímetros dos polígonos circunscritos
R = raio do círculo

n	$\frac{2p}{2R}$	$\frac{2P}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14156	3,14167

Notamos que os números da primeira coluna crescem e os da segunda decrescem, tendendo para o número π, que apresentamos com as vinte primeiras decimais.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

10.7 — COMPRIMENTO DE UM ARCO

Seja C_{AB} o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$. Como este comprimento é proporcional à sua medida, temos

$\hat{\alpha}$ em graus

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow 2\pi R \\ \alpha \quad \rightarrow C_{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{C_{AB} = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R}$$

$\hat{\alpha}$ em radianos

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rd} \rightarrow 2\pi R \\ \alpha \quad \rightarrow C_{AB} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{C_{AB} = \alpha R}$$

10.8 — CÁLCULO DE π

Consideremos um círculo de raio R e um polígono regular inscrito de n lados e perímetro 2p.

Este perímetro é menor que o comprimento do círculo, mas tende a esse valor quando o número de lados cresce indefinidamente.

Temos

$$\pi = \frac{C}{2R} \text{ e, fazendo } R = 1,$$

$$\pi = \frac{C}{2}$$

Consideraremos, agora, polígonos regulares inscritos no círculo de raio unitário, tendo cada um o dobro do número de lados do anterior. Utilizaremos, para isso, a fórmula da duplicação dos gêneros.

$$l_4 = \sqrt{2}$$

$$l_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$l_{16} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1^2 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}}\right)}$$

$$l_{16} = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)}$$

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Analogamente,

$$l_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

screveremos l_{32} como $l_2 4 + 1$, sendo 4 o número de radicais. Assim,

$$l_2 n + 1 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$$

com n radicais.

Esse polígono possui gênero igual a 2^{n+1} e seu perímetro é

$$2^{n+1} \cdot l_{2^{n+1}}.$$

Quando o número de lado cresce indefinidamente, esse valor tende para o comprimento do círculo que, para R = 1, é igual ao dobro do número π. Assim, dividindo por 2, temos

$$\boxed{\pi = 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}}$$

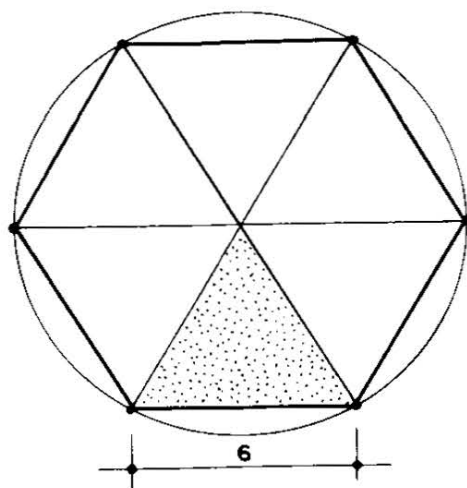
com n radicais.

10.9 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

351. Calcule a área do hexágono regular inscrito em um círculo de raio igual a 6.

Solução

$l_6 = R = 4$

A área do hexágono regular é igual a 6 vezes a área do triângulo equilátero de lado igual a 4. Então,

$$S = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}.$$

Resposta: $54\sqrt{3}$ u. a.

352. Calcule a área do polígono regular convexo de perímetro 2p e apótema *a*.

Solução

Seja *l* o comprimento do lado e *n*, seu gênero. Como o polígono regular pode ser dividido em *n* triângulos de base *l* e altura *a*,

temos

$$S = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}. \quad \text{Mas } nl = \text{perímetro do polígono} = 2p.$$

$$S = \frac{2p \cdot a}{2} \Longrightarrow S = p \cdot a$$

Resposta: $S = pa$

353. Calcule o lado do polígono regular convexo de 24 lados.

Solução

Poderemos calcular l_{24} partindo de l_{12}, que conhecemos pela fórmula da duplicação do gênero.

$$l_{24} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{l_{12}^2}{4}}\right)}. \text{ Como } l_{12} = R\sqrt{2 - 3},$$

$$l_{24} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{4}}\right)}$$

$$l_{24} = \sqrt{2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{3}}\right)}$$

$$l_{24} = \sqrt{R\,(2R - R\sqrt{2 + \sqrt{3}})}$$

$$l_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Resposta: $R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

354. A razão entre os comprimentos de dois círculos é k. Calcule a razão entre suas áreas.

Solução

$$\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2} = k = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = k^2$$

Resposta: k^2.

355. O comprimento de um círculo de raio R_1 é igual ao comprimento de um arco de $30°$ de um círculo de raio R_2. Se a área do primeiro é igual a 2, calcule a área do segundo.

Solução

Comprimento do círculo de raio $R_1 = 2\pi R_1$
Comprimento do arco de $30°$ do círculo de raio

$$R_2 = \frac{30}{360} - 2\pi R_2 = \frac{1}{12} 2\pi R_2$$

Igualando, $2\pi R_1 = \frac{1}{12} 2\pi R_2 \implies$

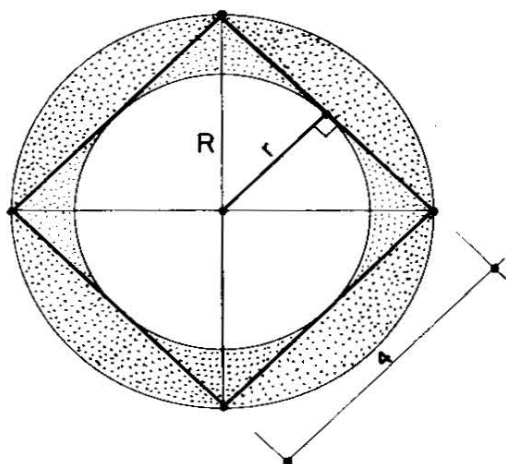
$$\implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \implies \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{144} \qquad \text{Se } S_1 = 2,$$

$$\frac{2}{S_2} = \frac{1}{144} \implies S_2 = 288$$

Resposta: 288

356. Calcule a área da coroa circular limitada pelos círculos inscrito e ciscunscrito a um quadrado de lado 4.

Solução

$$l_4 = 4 = R\sqrt{2} \Longrightarrow R = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = r = \frac{4}{2} = 2$$

$$S = \pi\,(R^2 - r^2)$$

$$S = \pi\,[(2\sqrt{2})^2 - 2^2] = 4\pi$$

***Resposta:** 4π.*

357. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 os vértices de um pentágono regular convexo inscrito em um círculo de raio unitário. Calcule o produto.

$$P = P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \cdot P_1P_5$$

Solução

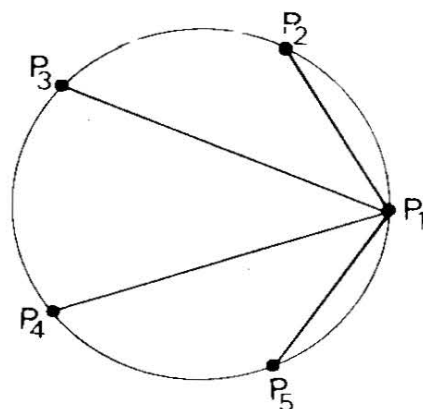
Como

$P_1P_2 = P_1P_5 = l_5$ e

$P_1P_3 = P_1P_4 = l_5^2$, temos

$P = (l_5)^2 \cdot (l_5^2)^2 =$

$$= \frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5})\,\frac{1}{4}(10 + 2\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{16}(100 - 20) = \frac{80}{16} = 5.$$

***Resposta:** 5.*

Observação

Este problema pode ser generalizado. Cabe ao leitor interessado demonstrar que, se P_1, P_2, $P_3, \ldots, P_n$ são vértices de um

polígono regular de *n* lados inscrito em um círculo de raio igual a 1, $P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \ldots P_1P_n = n$.

358. O comprimento de um círculo é 12π. Um arco AB deste círculo tem comprimento igual a 5π. Calcule em graus a medida do arco AB.

Solução

$$\begin{matrix} 12\pi - 360° \\ 5\pi - \alpha \end{matrix} \implies \alpha = 150°$$

Resposta: 150°

PROBLEMAS PROPOSTOS

359. A área do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio unitário é:

A) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$
E) NRA.

360. Calcule a distância entre dois lados opostos de um hexágono regular de lado $2\sqrt{3}$.

A) $2\sqrt{6}$ C) 4
B) $3\sqrt{3}$ D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
E) 6

361. Calcule a razão entre as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo.

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{8}$
E) NRA.

362. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos equiláteros inscrito e circunscrito ao mesmo círculo.

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{9}$

363. Calcule o comprimento do círculo circunscrito a um triângulo equilátero sabendo que o círculo nele inscrito tem comprimento igual a 8π.

A) 16π C) 32π

B) 24π D) 48π

E) 64π

364. A área do círculo circunscrito a um triângulo equilátero mede 400π. A área do triângulo equilátero mede:

A) 300π C) $600\sqrt{3}$

B) $300\sqrt{3}$ D) 600π

E) NRA.

365. Quantos polígonos regulares não semelhantes existem com 48 lados?

A) 5 C) 7

B) 6 D) 8

E) 9

366. Quantos polígonos regulares não semelhantes existem com 32 lados?

A) 4 C) 6

B) 5 D) 7

E) NRA.

367. Quando se divide um círculo em 84 partes e se une os pontos de divisão de 7 em 7, obtemos:

A) um polígono convexo de 84 lados

B) um polígono de 84 lados e espécie 7

C) um dodecágono de espécie 7

D) um dodecágono convexo

E) NRA.

368. Quando se divide um círculo em 90 partes e se une os pontos de divisão de 24 em 24, obtemos:

A) um polígono estrelado de 90 lados

B) um polígono convexo de 24 lados

C) um pentadecágono estrelado

D) um eneágono convexo

E) NRA.

369. Dividindo-se um círculo em 47 partes iguais, quantos polígonos diferentes podem ser construídos?

A) 21

B) 22

C) 23

D) 24

E) NRA.

370. O lado de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio R é:

A) $R\sqrt{3}$

B) $2R\sqrt{3}$

C) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

D) $3R\sqrt{3}$

E) NRA.

371. Calcule o perímetro do hexágono circunscrito a um círculo de raio R.

A) $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$

B) $2R\sqrt{3}$

C) $3R\sqrt{3}$

D) $4R\sqrt{3}$

E) $6R\sqrt{3}$

372. Calcule a área do hexágono cujos vértices são os pontos médios dos lados de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 4.

A) $12\sqrt{3}$

B) $18\sqrt{3}$

C) $24\sqrt{3}$

D) $30\sqrt{3}$

E) NRA.

373. Calcule a distância entre dois lados opostos de um octógono regular inscrito em um círculo de raio unitário.

A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2} + 1$

C) $2 + \sqrt{2}$

D) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

E) NRA.

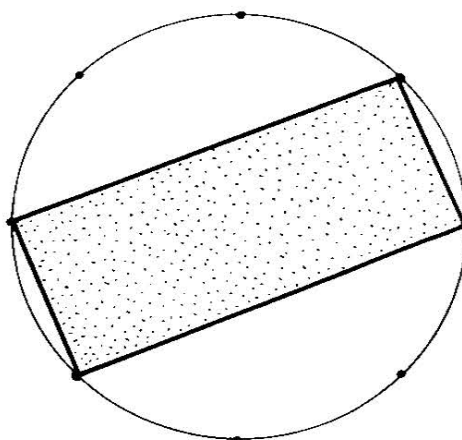
374. Um círculo de raio $\sqrt{2}$ está dividido em 8 partes iguais, como mostra a figura. A área do retângulo assinalado é:

A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) 2

D) 4

E) NRA.

375. Sejam l_5 e l_{10}^3 os lados do pentágono regular convexo e do decágono regular estrelado inscritos em um círculo de raio 1. Então, $(l_5)^2 + (l_{10}^3)^2$ é igual a:

A) 1 C) 4

B) 2 D) 10

E) NRA.

376. Calcule a altura de um trapézio isósceles inscrito em um círculo de raio 2 sabendo que as bases estão situadas em semiplanos opostos determinados por um diâmetro paralelo e são iguais aos lados do triângulo equilátero e hexágono regular inscritos nesse círculo.

A) $\sqrt{3} + 1$ C) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{3} - 1$ D) $\sqrt{3} + 2$

E) NRA.

377. O lado do octógono regular inscrito num círculo de raio R mede $\sqrt{2}$. Então, R vale:

A) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ C) $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

B) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ D) $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

E) NRA.

378. Os catetos de um triângulo retângulo são iguais ao lado do hexágono e do decágono regulares convexos inscritos num mesmo círculo. A hipotenusa desse triângulo é:

A) l_{10}^3 C) l_5^2

B) l_5 D) l_8

E) NRA.

379. (CICE — 68) Seja p o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r. Assinale qual das seguintes relações é verdadeira.

A) $p + 2n\sqrt{2}\,r$

B) $p + (n+1)\sqrt{5}\,r$

C) $p < 7r$

D) $p > 8r$

E) $p = \dfrac{n^2}{2}\sqrt{3}\,r$

380. As cordas AB e CD que não se cortam no interior de um círculo de raio R medem, respectivamente, $\dfrac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ e $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. As retas AC e CD formam ângulo de:

A) 36°

B) 21° ou 51°

C) 57° ou 87°

D) o problema está indeterminado

E) NRA.

381. Considere dois dodecágonos regulares convexos de lados 2 e 4. Calcule o lado do dodecágono regular convexo cuja área seja a soma das áreas dos dois primeiros.

A) 6

B) $\sqrt{6}$

C) 8

D) $2\sqrt{5}$

E) NRA.

382. Considere um triângulo equilátero e um quadrado inscritos em um círculo de raio unitário. Então, $l_3 + l_4$ é aproximadamente igual a:

A) 3

B) π

C) e (base dos logaritmos neperianos)

D) $\dfrac{24}{7}$

E) $\dfrac{23}{6}$

383. As duas tangentes traçadas de um mesmo ponto a um círculo de raio 2 determinam dois arcos sobre o círculo, sendo o menor de comprimento $\dfrac{\pi}{3}$. O ângulo entre as tangentes é:

A) 100°

B) 120°

C) 135°

D) 150°

E) 160°

384. A distância entre os pontos A e B é 3. Traçam-se círculos de raio 3 com centros em A e B, que se cortam em M e N. Calcule o perímetro da figura curvilínea AMBN.

A) π C) 4π

B) 2π D) 6π

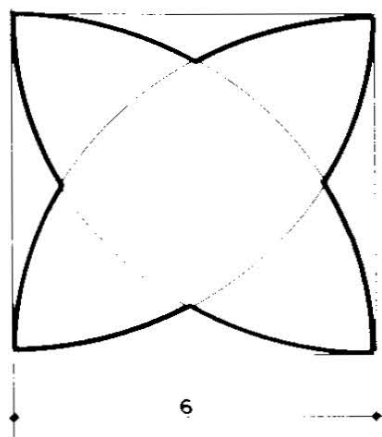
E) NRA.

385. Considere o quadrado de lado 6 da figura. Calcule o perímetro da figura assinalada.

A) 6π

B) 8π

C) 12π

D) 16π

E) NRA.

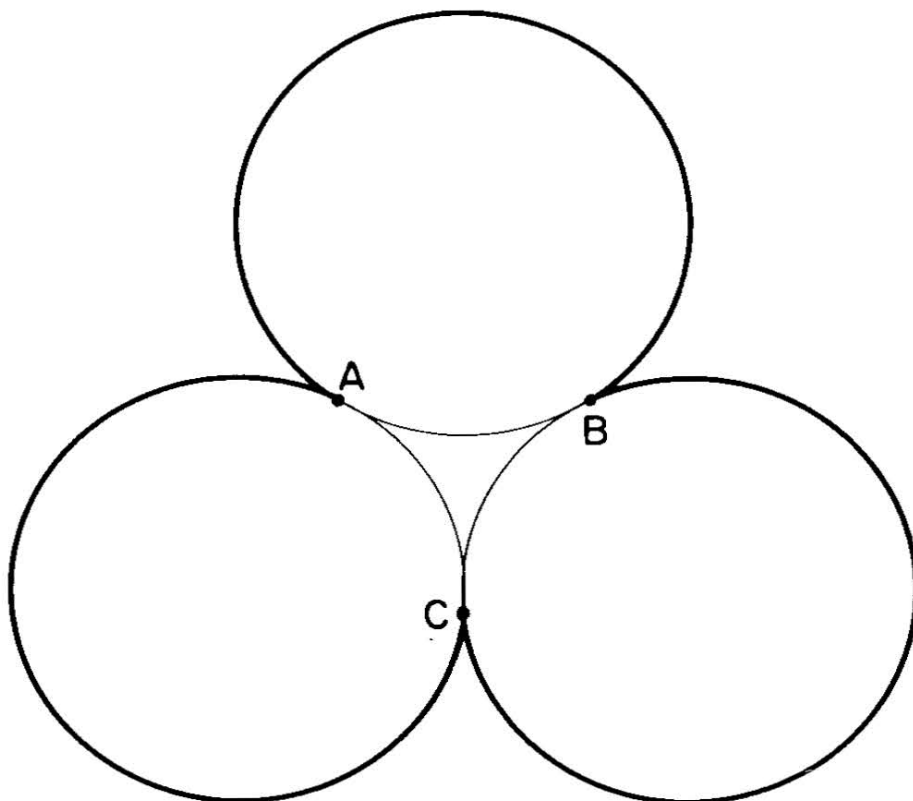
386. Os três círculos da figura são tangentes entre si, dois a dois, nos pontos A, B e C. Se o raio de cada um deles é igual a 1, o perímetro da figura curvilínea formada pelos maiores arcos AB, BC e CA mede:

A) 3π

B) 4π

C) 5π

D) 6π

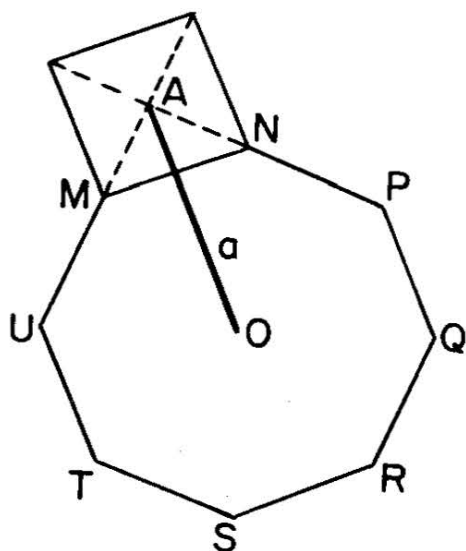
E) 9π

387. Duas diagonais de um pentágono regular de lado L cortam-se segundo dois segmentos m e n. Calcule estes segmentos em função de L.

388. Os pontos A, B, C e D são vértices consecutivos de um decágono regular de lado L inscrito em um círculo de centro O e raio R. A diagonal $\overline{AD}$ corta o raio $\overline{OB}$ em J. Calcule os segmentos $\overline{AJ}$ e $\overline{JD}$.

389. Calcule a razão entre os perímetros dos dodecágonos inscrito e circunscrito a um mesmo círculo.

390. Considere um pentágono regular convexo ABCDE de centro O. A reta AO encontra BE em M e DC em N. Demonstre que os pontos A, M, O e N formam uma divisão harmônica.

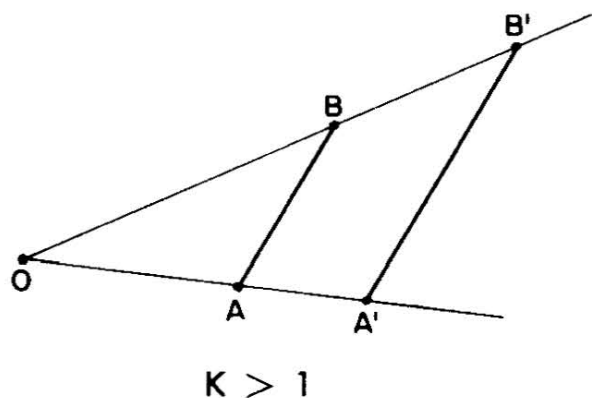
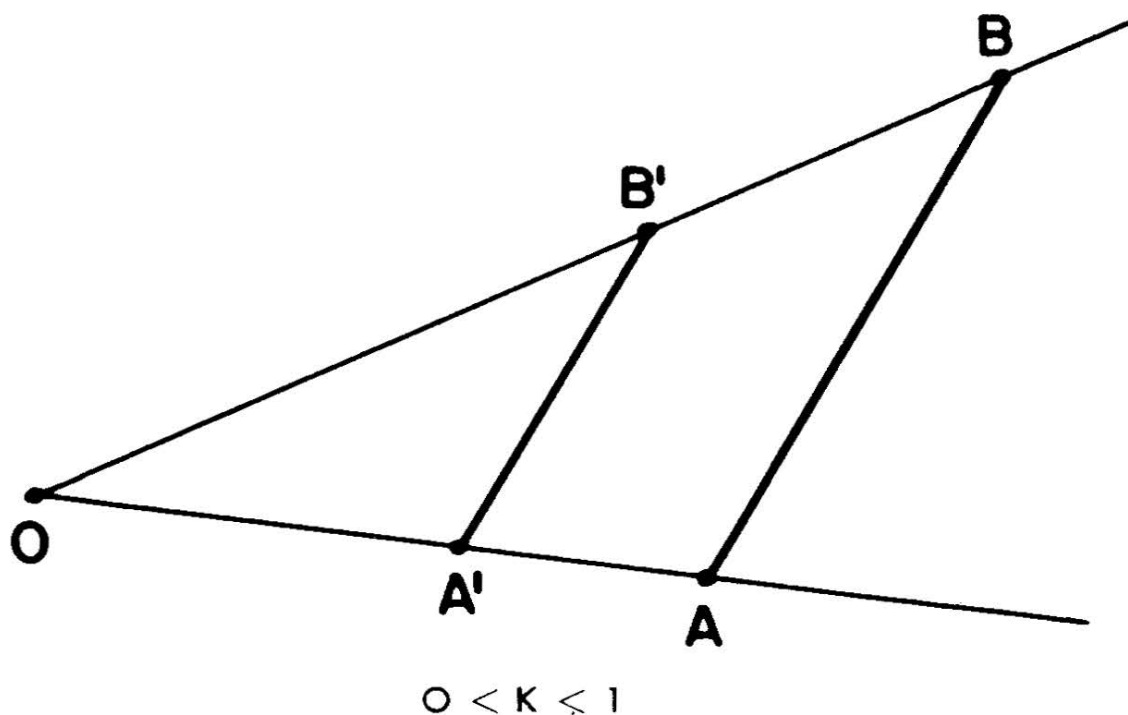
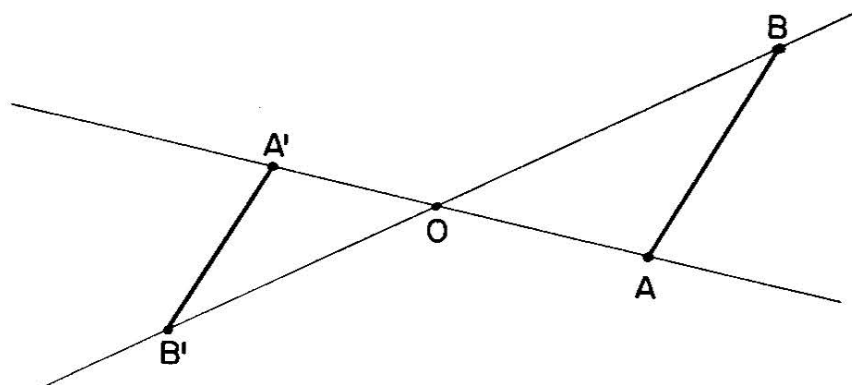
391. (IME — 67) A figura abaixo mostra o octógono MNPQRSTU e um quadrado construído tendo por base $\overline{MN}$. Sabendo que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de interseção das diagonais do quadrado é a, determine a área do quadrado em função de a.

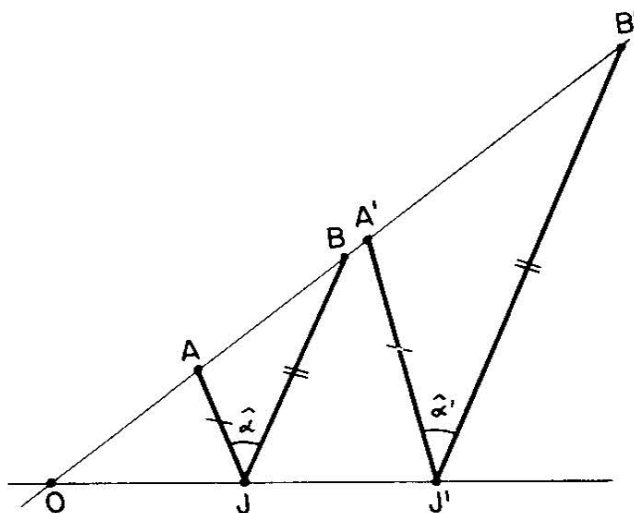
APÊNDICE

A-1 — HOMOTETIA

1.1 — Dados em um plano os pontos O e A, e um número real $k \neq 0$, chama-se *homotetia* de centro O e razão (ou característica) k à transformação que a todo ponto A faz corresponder um ponto A′ tal que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ chamaremos de Hom (O, K).

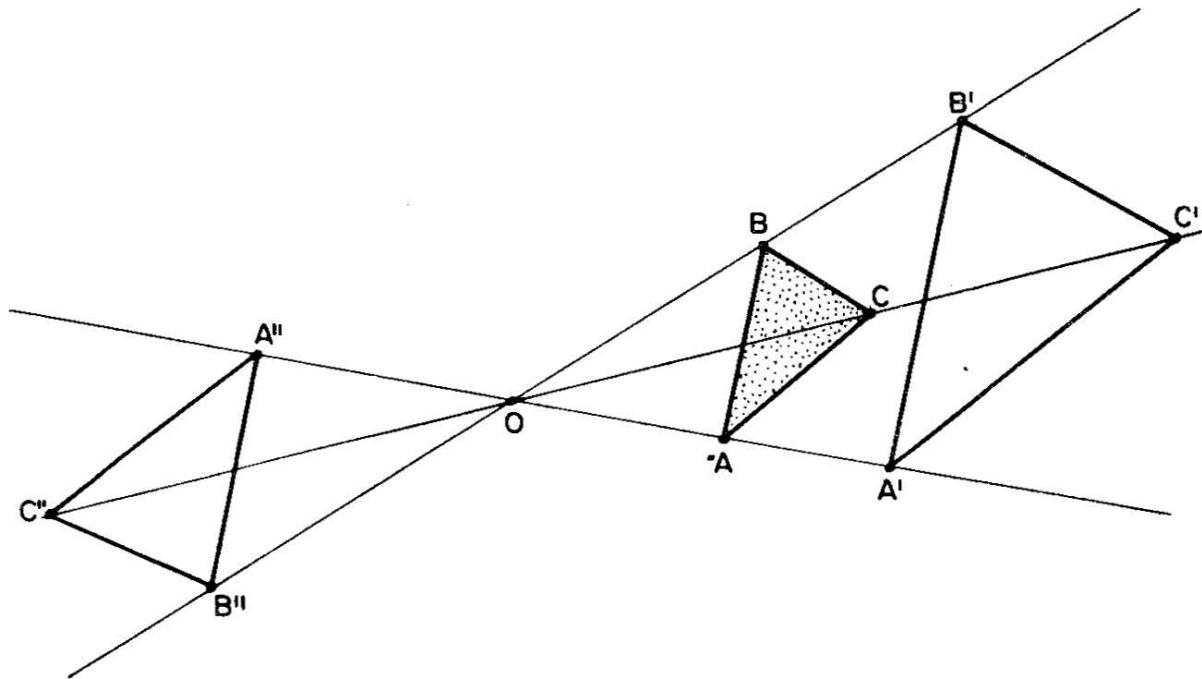
$K > 1$

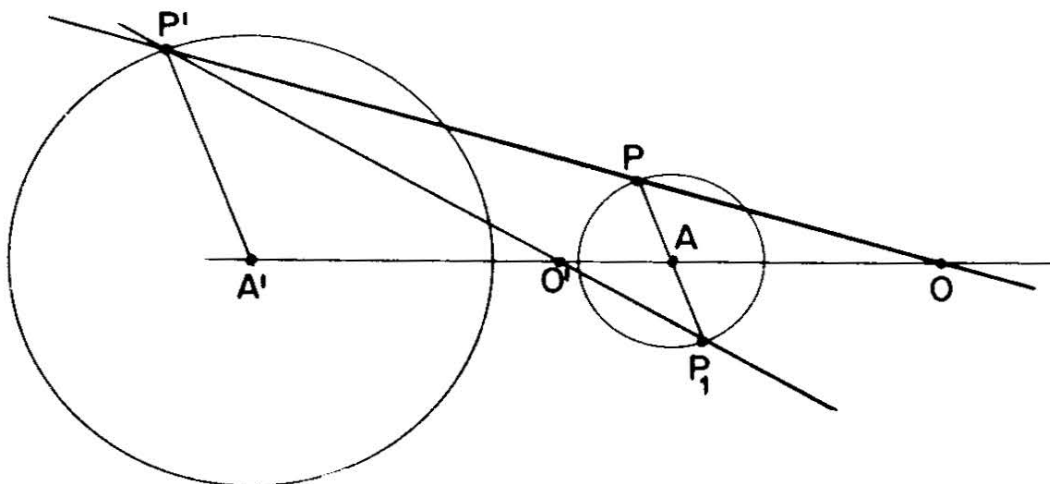
$O < K < 1$

$K < O$. (*)

Da própria definição decorre que os triângulos CAB e OA'B' são semelhantes, sendo $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$. Portanto, a homotetia transforma uma reta em outra paralela distinta, caso k seja diferente de O' e de 1, e caso a reta não contenha o centro O.

1.2 — A figura homotética de um ângulo $A\widehat{J}B$ é um ângulo $A'\widehat{J'}B'$ congruente com o primeiro.

De fato, como $\overline{JA} \parallel \overline{J'A'}$ e $\overline{JB} \parallel \overline{J'B'}$, independentemente da razão, $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$.

* Se $k = -1$, a transformação é uma simetria de centro 0.

1.2.1 — A figura homotética de um triângulo (polígono) é um outro semelhante ao primeiro.

Este fato decorre imediatamente da definição e propriedades anteriores.

1.3 — A figura homotética de um círculo é um outro círculo.

Seja um círculo de centro A e raio R. Se o imaginarmos formado pelas extremidades dos segmentos $\overline{AP}$, todos congruentes, a figura deste círculo transformada em uma homotetia será formada pelos extremos

dos segmentos $\overline{A'P'}$, todos congruentes e de comprimento igual a $|k| \cdot AP$. Assim, concluímos que:

1) A figura transformada de um círculo (A, R) em uma Hom(O, K) é um círculo $(A', |K| R)$, onde $\overrightarrow{OA'} = K \cdot \overrightarrow{OA}$.

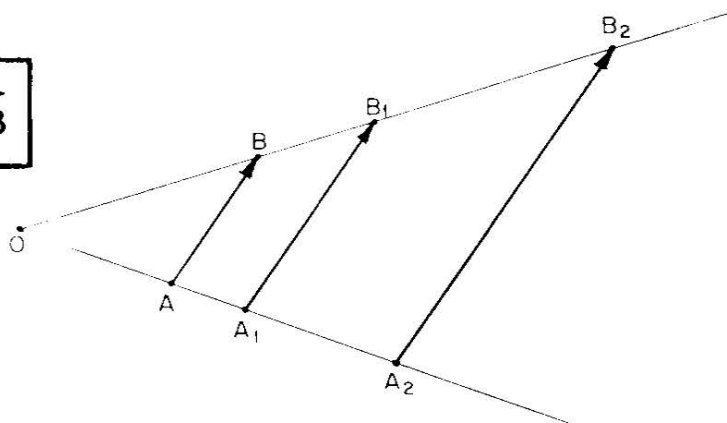
2) Dados dois círculos não concêntricos e de raios diferentes existem sempre duas homotetias que transformam um deles no outro.

3) As tangentes comuns a dois círculos passam pelo centro de homotetia.

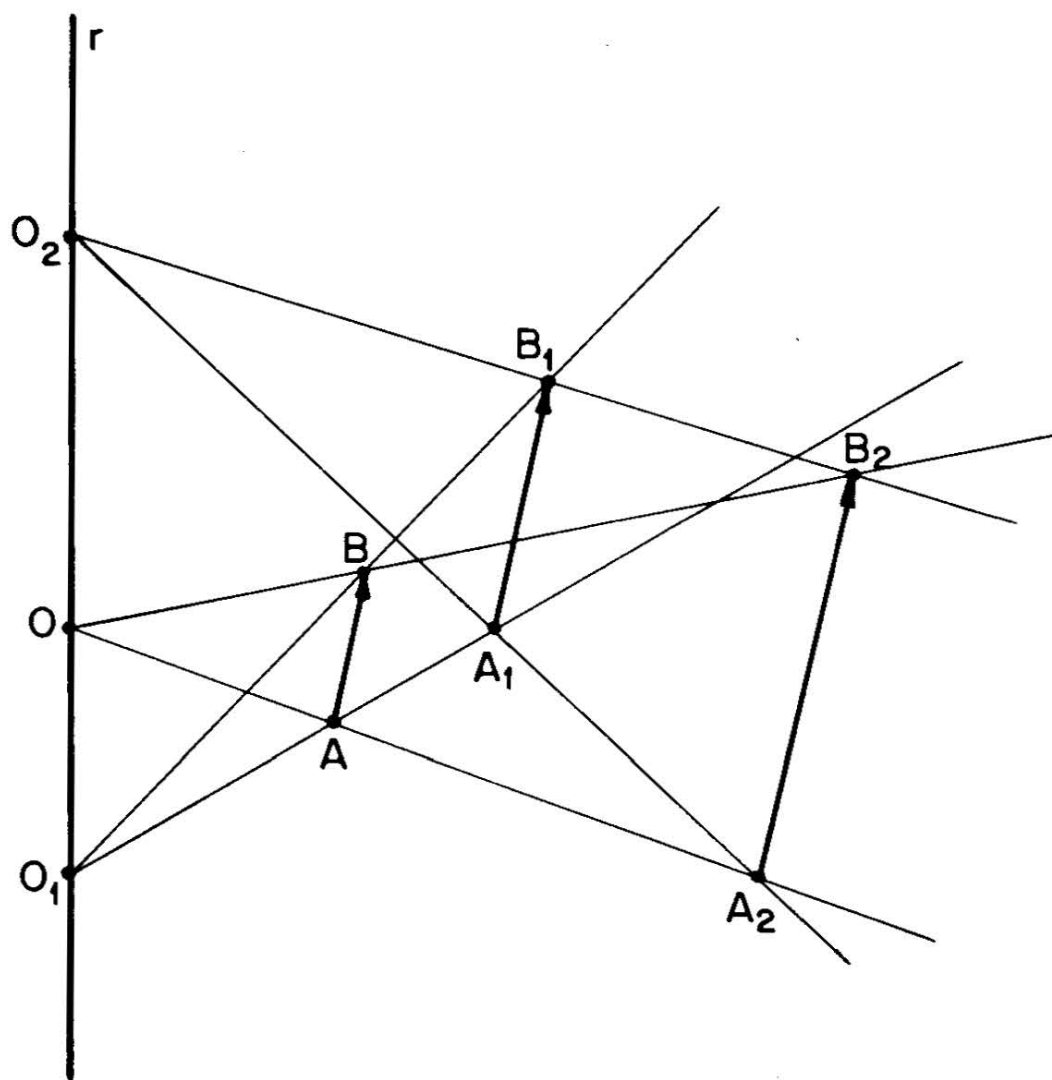
1.4 — Produto de homotetias

1.4.1. — Produto de homotetias de mesmo centro.

Sejam Hom (O, K_1) e Hom (O, K_2) duas homotetias. A primeira transforma um vetor $\overrightarrow{AB}$ em outro $\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ e a outra transforma $\overrightarrow{A_1B_1}$ em outro $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Por simples substituição vemos que

$$\boxed{\overrightarrow{A_2B_2} = K_1 \cdot K_2 \cdot \overrightarrow{AB}}$$

o que mostra que a Hom $(O, k_1 \cdot k_2)$ transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{A_2B_2}$.

Vemos, também, que o produto de homotetias é comutativo, não influindo a ordem em que são feitas as transformações.

1.4.2. — Produto de homotetias de centros distintos.

Consideremos, agora, Hom (O_1, K_1) e Hom (O_1, K_2). A primeira transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \, , \overrightarrow{AB}$ e a segunda transforma $\overrightarrow{A_1B_1}$ em $\overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Vemos também que, como

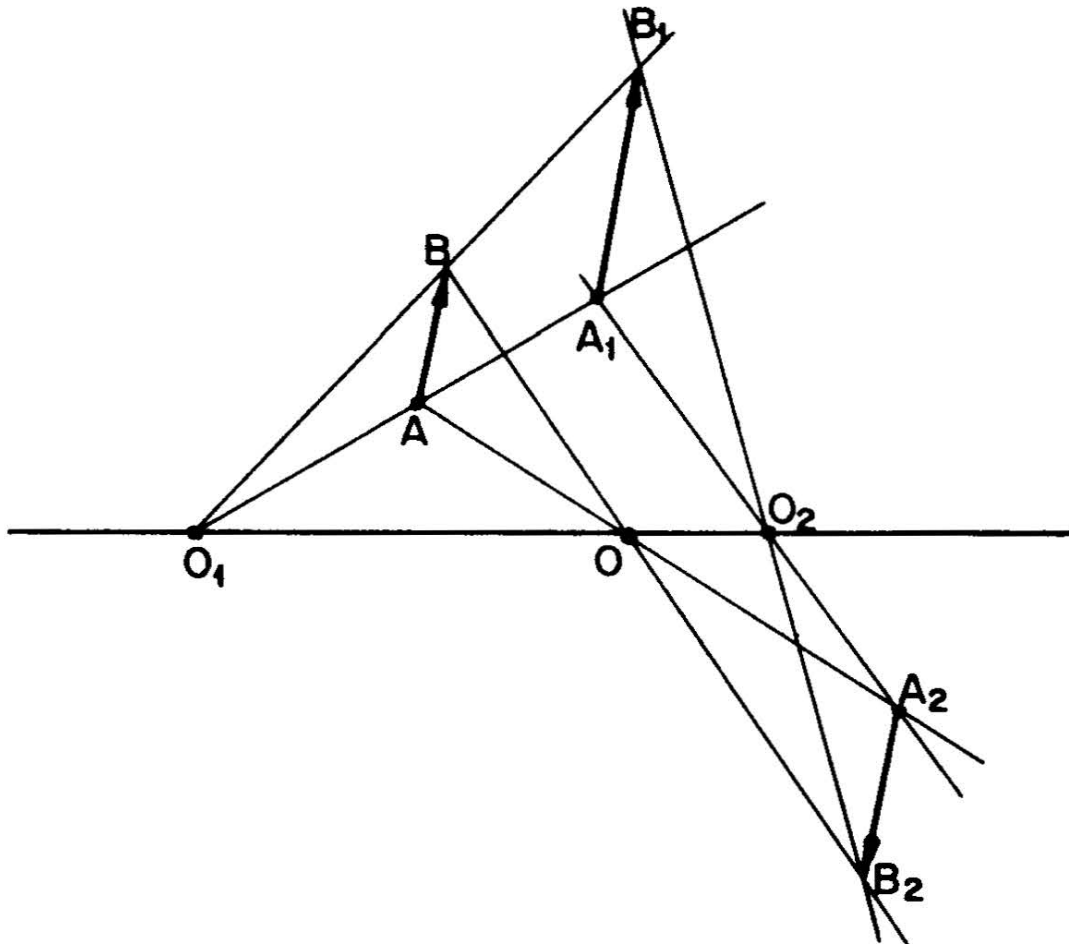
$$\overrightarrow{A_2B_2} = k_1 \cdot k_2 \cdot \overrightarrow{AB},$$

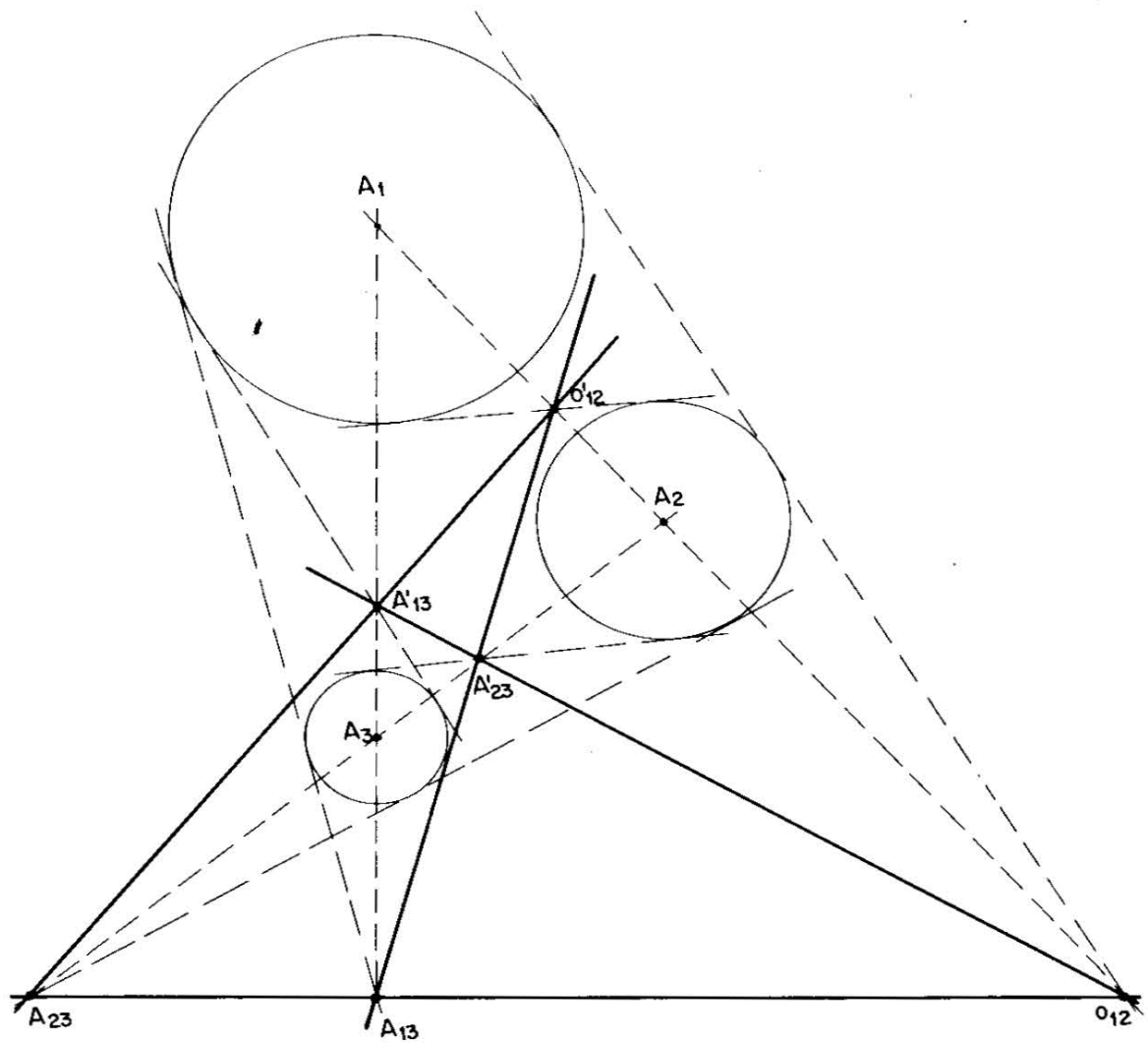
existe uma homotetia de centro O e razão $k_1 \cdot k_2$ que transforma $\overrightarrow{AB}$ e, $\overrightarrow{A_2B_2}$. (*)

* $k1 \cdot k2 \neq 1$ para que exista O perfeitamente determinado.

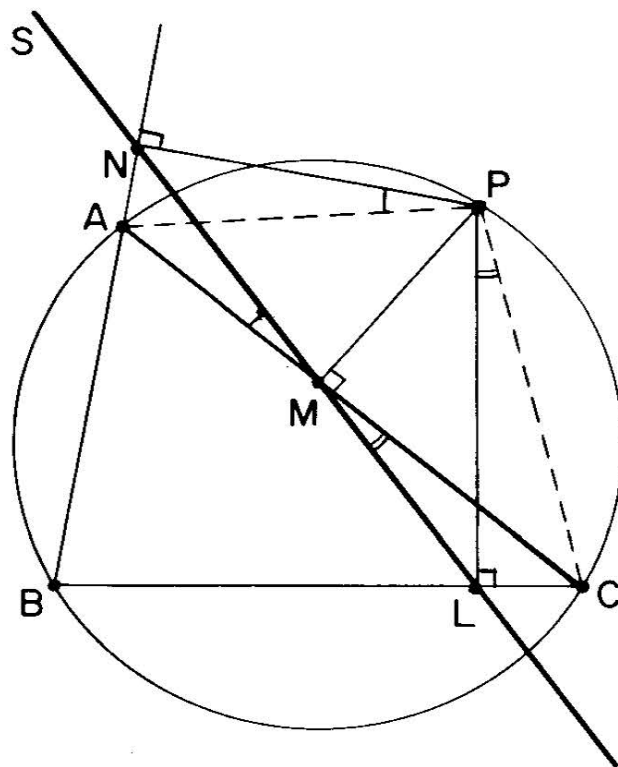
Concluímos, ainda, que:

1) O, O_1 e O_2 são colineares.

De fato, seja r a reta que contém O_1 e O_2. Na primeira transformação, $r_1 \equiv r$ e, na segunda, $r_2 \equiv r_1 \equiv r$. Como $r_2 \equiv r$, então r contém o centro O da homotetia que transforma $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{A_2B_2}$.

2) A homotetia produto será *direta* se as duas primeiras forem ambas diretas ou ambas inversas e será *inversa* se uma for direta e outra inversa.

3) Três círculos de raios distintos e dois não concêntricos determinam sempre seis centros de homotetia.

Este fato decorre imediatamente das propriedades anteriores.

A-2 — A RETA DE SIMPSON-WALLACE

2.1 — Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados desse triângulo são colineares.

Porque os quadriláteros PMAN e PMLC são inscritíveis,

$$N\widehat{P}A = N\widehat{M}A \quad \text{e} \quad C\widehat{P}L = C\widehat{M}L.$$

Porque os quadriláteros BNPL e BAPC são inscritíveis,

$$N\widehat{P}L = A\widehat{P}C, \text{ pois são suplementos de } \widehat{B}.$$

Logo, $N\widehat{P}A = C\widehat{P}L$ ou $N\widehat{M}A = C\widehat{M}L$, o que mostra que os pontos L, M e N são colineares. A reta que os contém é chamada reta de Simpson, reta de Wallace ou simplesmente simson do ponto P.

2.2 — Se as perpendiculares de um ponto P do círculo circunscrito a um triângulo ABC aos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ encontram novamente o círculo em L'', M' e N', as retas $\overline{AL'}$, $\overline{BM'}$ e $\overline{CN'}$ são paralelas à simson do ponto P.

$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{\alpha} = \widehat{\gamma} & = \dfrac{\widehat{AP}}{2} \\ \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}. & \text{(quadrilátero inscritível PMLC)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{\beta} = \widehat{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AL'} \;//\; S.$$

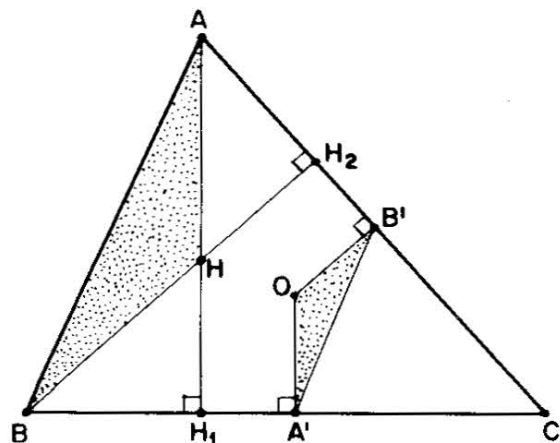
2.3 — Se o ponto P move-se sobre o círculo circunscrito de um arco de medida $\widehat{\alpha}$, a reta de Simpson move-se de um ângulo de medida $\frac{\widehat{\alpha}}{2}$ no sentido contrário à rotação de P.

2.4 — A reta de Simpson de um ponto P divide ao meio o segmento que une o ortocentro do triângulo ao ponto P.

2.5 — Os simétricos de um ponto do círculo circunscrito em relação aos lados do triângulo inscrito estão sobre uma reta paralela à de Simpson passando pelo ortocentro do triângulo.

2.6 — O ângulo formado pelas retas de Simpson de um ponto P em relação a dois triângulos inscritos é o mesmo para qualquer posição de P.

A–3 — A RETA DE EULER — O CÍRCULO DOS NOVE PONTOS

3.1 — A distância de um circuncentro de um triângulo a um dos lados é a metade da distância do ortocentro ao vértice oposto.

Como $\overline{OA'} \parallel \overline{HA}$,

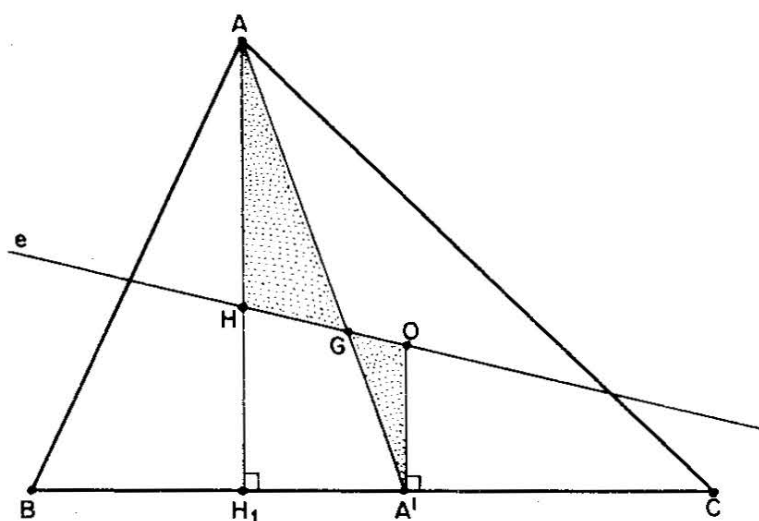
$\overline{OB'} \parallel \overline{HB}$,

$\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, e

$$A'B' = \frac{1}{2} AB,$$

os triângulos $OA'B$ e HAB são semelhantes na razão $\frac{1}{2}$, sendo

$$\boxed{OA' = \frac{1}{2} HA.}$$

3.2 — Em um triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão alinhados.

Como A' é médio de $\overline{BC}$, $\overline{AA'}$ é uma mediana, os triângulos AHG e GOA' são semelhantes, e sendo

$$\frac{OA'}{HA} = \frac{1}{2}$$ a razão

de semelhança, então $GA' = \frac{1}{2} GA$,

sendo G, portanto, o baricentro do triângulo.

A reta que contém o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo é chamada *reta de Euler* do triângulo.

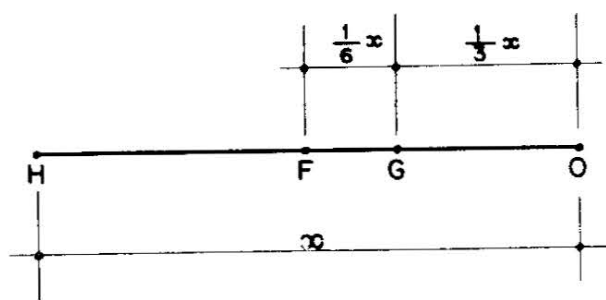
3.3 — O baricentro de um triângulo divide o segmento que une o ortocentro ao circuncentro na razão $\frac{1}{2}$.

Como os triângulos AHG e GOA′ são semelhantes na razão $\frac{OA'}{HA} = \frac{1}{2}$, logo

$$GO = \frac{1}{2} GH.$$

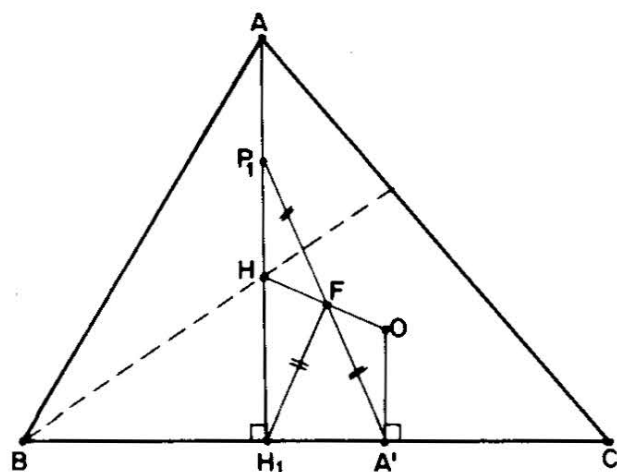
3.4 — Círculo dos nove pontos

Transformemos o círculo circunscrito de um triângulo pela Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Seja F o centro do novo círculo. Ele é tal que

$$GF = -\frac{1}{2} GO.$$

De acordo com a figura,

$$FO = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) x$$

$$\Longrightarrow FO = \frac{1}{2} x$$

Logo, o centro do círculo transformado é o ponto médio do segmento $\overline{OH}$. Ora, segundo a Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$, os pontos A, B e C transformam-se em A′, B′ e C′ médios dos lados do triângulo.

Como F é médio de $\overline{OH}$, $\overline{FA} = \overline{FH_1}$, o que mostra passar este círculo também pelos pés das alturas do triângulo.

Da congruência dos triângulos FOA′ e FHP_1, temos

$$OA' = HP_1 = \frac{1}{2} HA.$$

Logo, P_1 é médio do segmento $\overline{HA}$ e, como $FA' = FP_1$, vemos também que este círculo passa pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices e que são chamados de *pontos de Euler* do triângulo.

Como transformamos o círculo circunscrito segundo a Hom $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$,

o raio do círculo dos nove pontos tem raio $\frac{R}{2}$.

Assim, o círculo dos nove pontos:

a) tem raio $\frac{R}{2}$,

b) tem centro no ponto F, médio de $\overline{OH}$,

c) contém

A', B', C' → pontos médios dos lados

H_1, H_2, H_3 → pés das alturas

P_1, P_2, P_3 → pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices.

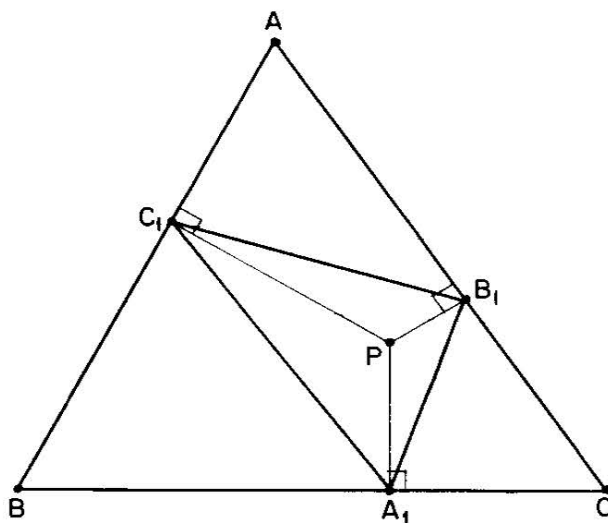
3.5 — Os triângulos ABC, BCH, CAH e ABH possuem o mesmo círculo dos nove pontos.

Observação: o círculo inscrito e os três círculos exinscritos são chamados de círculos tritangentes.

3.6 — Teorema de Feuerbach

Cada um dos triângulos ABC, BCH, CAH e ABH definem quatro círculos tritangentes. Estes 16 círculos são tangentes ao círculo dos nove pontos.

A-4 — TRIÂNGULOS PEDAIS

4.1 — Seja P um ponto do plano de um triângulo ABC e sejam $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$ e $\overline{PC_1}$ as perpendiculares traçadas por P aos lados $\overline{BC}$ $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo. Se P não pertence ao círculo circunscrito, o triângulo $A_1B_1C_1$ é chamado *triângulo pedal de P.*

4.2 — Lados do triângulo pedal

Como AC_1PB_1 é inscritível, pela Lei dos Senos,

$$\frac{B_1C_1}{\text{sen}\,\widehat{A}} = PA; \quad \text{mas} \quad \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = 2R \implies$$

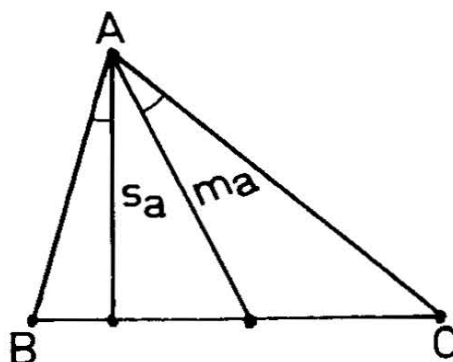
$$\implies \quad B_1C_1 = \frac{a \cdot PA}{2R}.$$

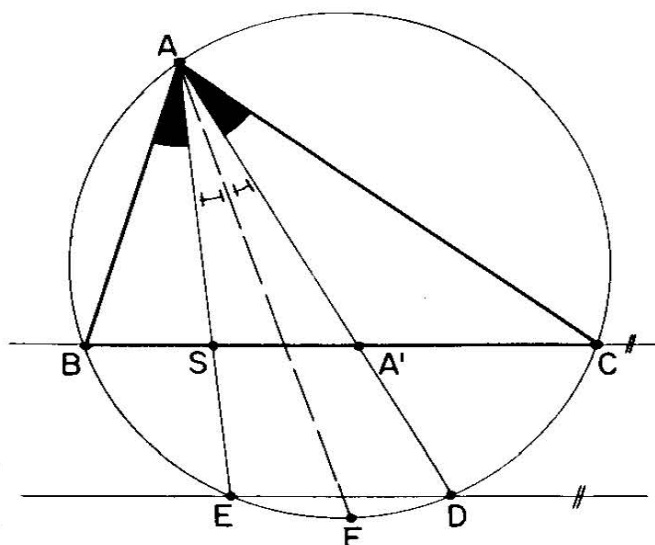
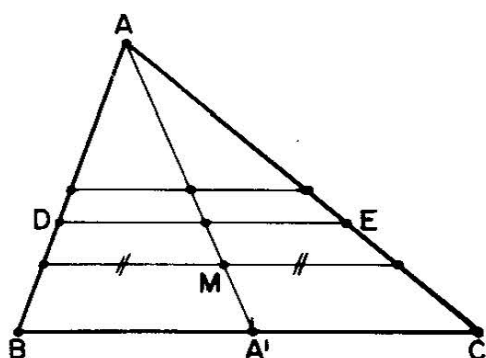
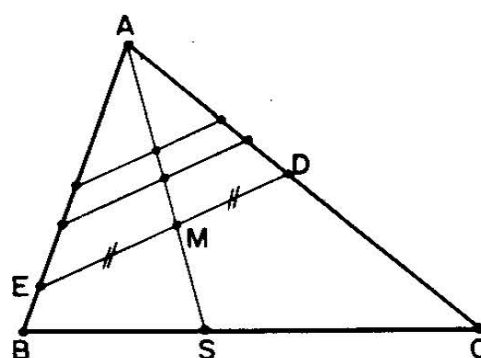
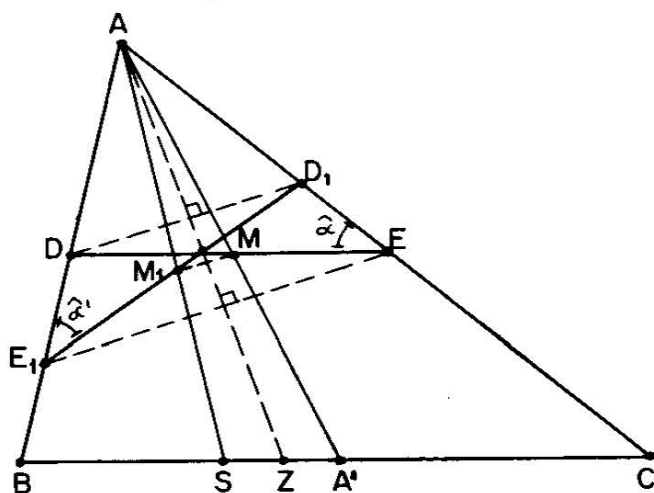
Assim, se x, y e z são as distâncias de P aos vértices A, B e C, os lados do triângulo pedal medem

$$\frac{ax}{2R}, \ \frac{bx}{2R} \ \text{e} \ \frac{cx}{2R}.$$

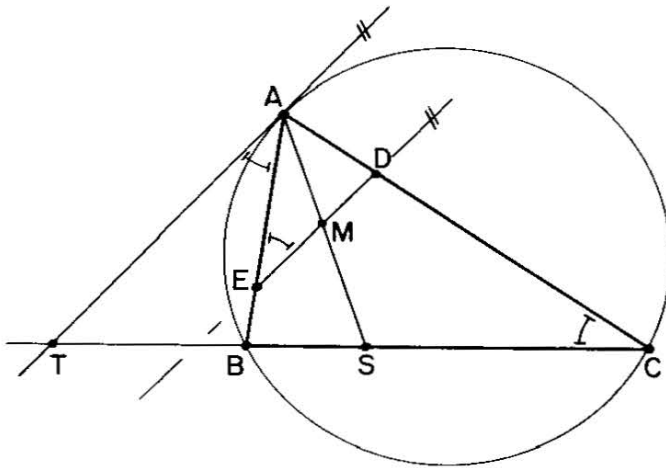
A-5 — AS SIMEDIANAS

5.1 — A isogonal de uma mediana chama-se *simediana*.

5.2 — A bissetriz de um ângulo de um triângulo é também bissetriz do ângulo formado pela mediana e simediana traçadas do mesmo vértice.

5.3 — Se D e E são os pontos em que a mediana e simediana encontram o círculo circunscrito a um triângulo ABC, então $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{BC}$.

Como F é médio de $\widehat{BC}$ e $\widehat{BE} = \widehat{DC}$, logo $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

5.4 — A simediana relativa ao lado *a* de um triângulo ABC divide ao meio qualquer antiparalela ao lado $\overline{BC}$.

$\left.\begin{array}{l}\overline{AA'} \rightarrow \text{mediana}\\ \overline{DE} \parallel \overline{BC}\end{array}\right\} \Longrightarrow DM = ME.$

$\left.\begin{array}{l}\overline{AS} \rightarrow \text{simediana}\\ \overline{DE} \text{ anti} \parallel \overline{BC}\end{array}\right\} \Longrightarrow DM = ME.$

A demonstração é elementar. Seja $\overline{AA'}$ uma mediana, $\overline{DE} \parallel BC$, sendo M médio de $\overline{DE}$. A simetria em relação à bissetriz $\overline{AZ}$ do ângulo $\widehat{A}$ leva a mediana $\overline{AA'}$ na simediana $\overline{AS}$, D em D_1, E em E_1 e M em M_1.

Concluímos imediatamente que $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'$, sendo, portanto, $\overline{D_1E_1}$ e $\overline{BC}$ antiparalelas em relação aos lados do ângulo $\widehat{A}$, e que, se M é médio do DE, então M_1 é médio de $\overline{D_1E_1}$.

5.5 — Em um triângulo ABC, o pé da simediana e o pé da tangente ao círculo circunscrito, traçadas por A, dividem harmonicamente o lado $\overline{BC}$.

Ora, como $\widehat{C} = A\widehat{E}D = B\widehat{A}T$, a antiparalela $\overline{DE}$ é paralela à tangente $\overline{AT}$, e, como M é médio de $\overline{DE}$, o feixe A(TBSC) é harmônico (V. 3.9.2).

5.6 — O ponto S, pé da simediana traçada pelo vértice A de um triângulo ABC, divide o lado $\overline{BC}$ na razão $\dfrac{c^2}{b^2}$.

Como a razão $\dfrac{SB}{SC}$ é igual a $\dfrac{TB}{TC}$, calcularemos esta última.

Da semelhança dos triângulos ABT e CAT, temos

$$\frac{TA}{TC} = \frac{c}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{TA^2}{TC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

mas $TA^2 = TB \cdot TC \Longrightarrow \dfrac{TB \cdot TC}{TC^2} = \dfrac{c^2}{b^2} \Longrightarrow$

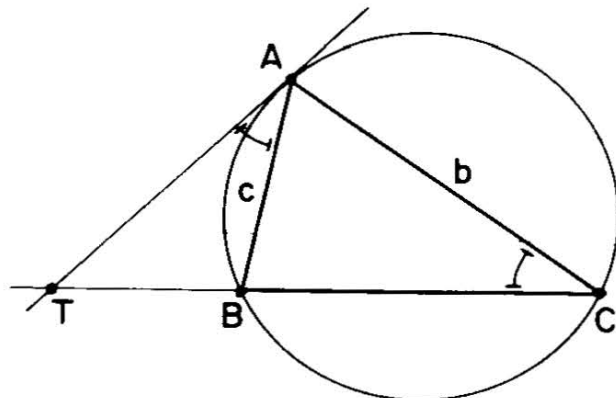
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{TB}{TC} = \frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2}}$$

5.7 — As distâncias de qualquer ponto da simediana aos lados adjacentes são proporcionais aos próprios lados.

Como os triângulos ASB e ASC possuem mesma altura em relação a $\overline{BC}$, a razão entre suas áreas é igual à razão $\dfrac{SB}{SC}$ de suas bases.

Assim,

$$\frac{S\,(ASB)}{S\,(ASC)} = \frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{cx}{2}}{\frac{by}{2}} \Longrightarrow$$

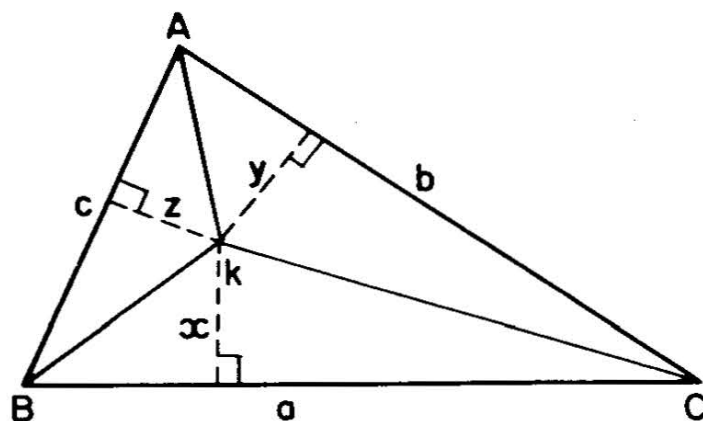
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{c}{b}}$$

5.8 — As três simedianas de um triângulo são concorrentes.

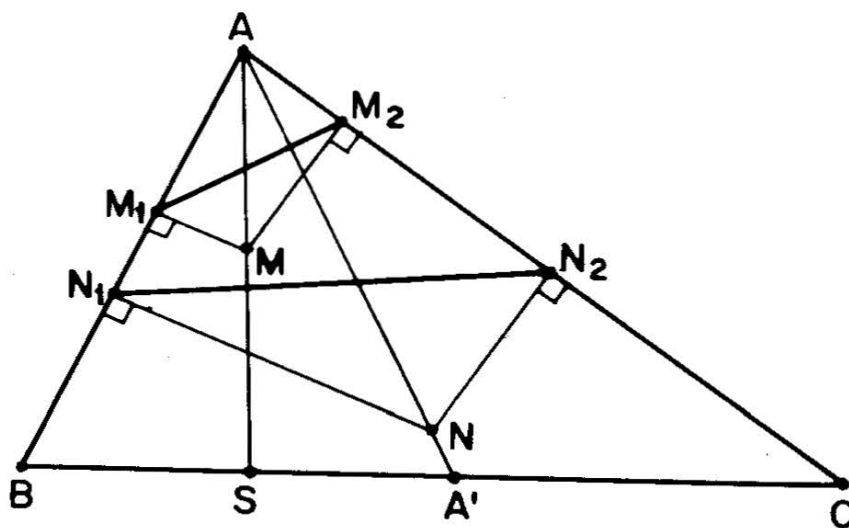
Seja K o ponto de concurso das simedianas S_a e S_b.

$$K \in S_a \Longrightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$K \in S_b \Longrightarrow \frac{z}{c} = \frac{x}{a}$$

Concluímos que $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$,

ou seja, $K \in S_c$.

O ponto K, de concurso das simedianas, é chamado *ponto de Lemoine* e é o único ponto cujas distâncias aos lados são proporcionais aos próprios lados. Além disso, devemos notar que o ponto K forma os triângulos KBC, KAC e KAB, de áreas proporcionais a a^2, b^2 e c^2, respectivamente.

5.9 — Se por um ponto de uma simediana (mediana) traçarmos perpendiculares aos lados adjacentes, o segmento que une os pés dessas perpendiculares é perpendicular à mediana (simediana) correspondente.

Como AM_1MM_2 é inscritível, $M_1AM = M_1\widehat{M_2}M = A'\widehat{A}C$, o que mostra ser $\overline{M_1M_2}$ perpendicular a $\overline{AA'}$. Da mesma forma demonstramos que $\overline{N_1N_2}$ é perpendicular a $\overline{AS}$.

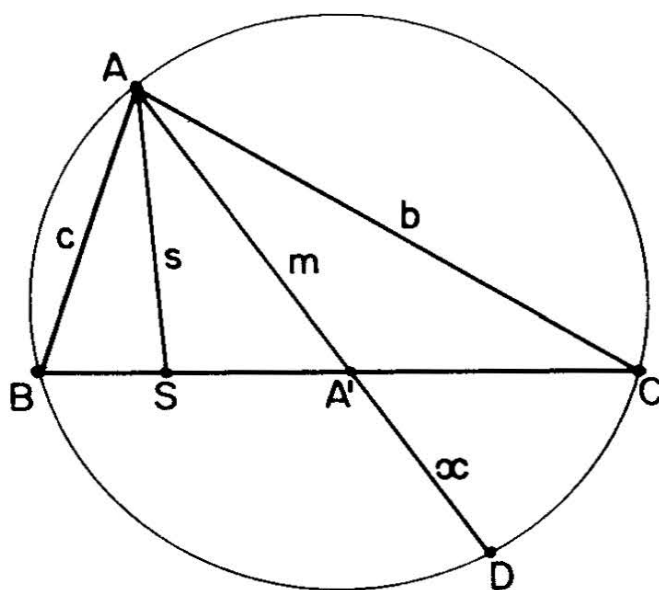
Concluímos, ainda, que:

1) $\overline{M_1M_2}$ e $\overline{N_1N_2}$ são antiparalelas em relação ao ângulo $\widehat{A}$.

2) M_1, M_2, N_2 e N_1 são concíclicos.

De fato, pois se $A\widehat{M_1}M_2 = A\widehat{N_1}N_2$, os triângulos AM_1M_2 e AN_1N_2 são semelhantes e $AM_1 \cdot AN_1 = AM_2 \cdot AN_2$, demonstrando as proposições acima.

Devemos notar que estas propriedades valem para duas cevianas isogonais quaisquer e as demonstrações são inteiramente análogas.

5.10 — Comprimento de uma simediana.

Sejam m e s o comprimento da mediana e simediana relativas ao lado a de um triângulo ABC. A mediana $\overline{AA'}$ corta o círculo circunscrito em D, e seja $A'D = x$.

Sabemos que

$$bc = S \cdot AD \quad \therefore \quad S = \frac{bc}{AD} \qquad (1)$$

$$\text{mas} \quad m \cdot x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \implies x = \frac{a^2}{4m}$$

$$AD = m + x = m + \frac{a^2}{4m} = \frac{4m^2 + a^2}{4m}$$

$$AD = \frac{4 \cdot \frac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2] + a^2}{4 \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}} = \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

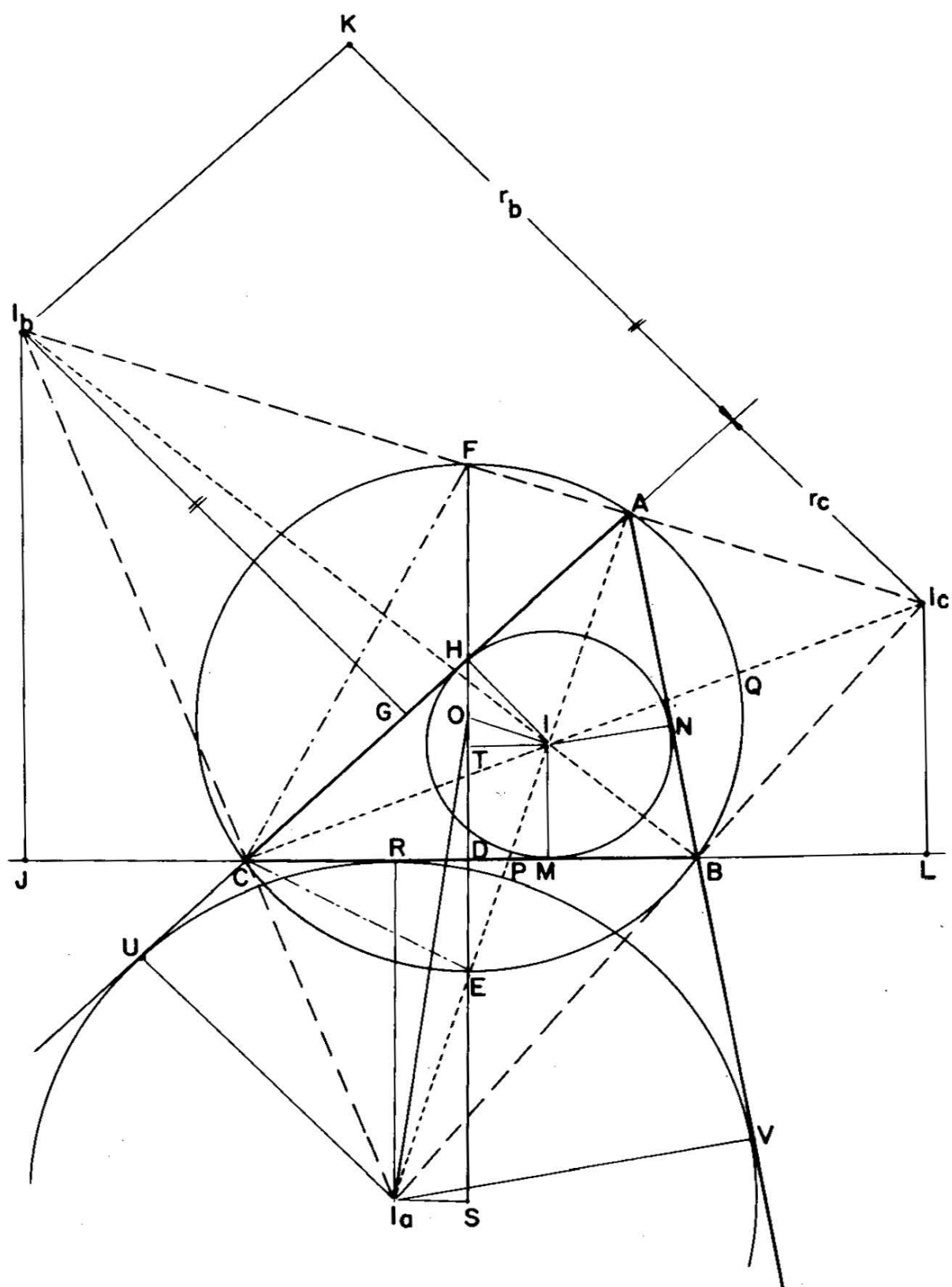
Levando em (1),

$$S = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Analogamente, se $S_a = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$,

então $S_b = \frac{ac}{a^2 + c^2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$ e

$S_c = \frac{ab}{a^2 + b^2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$

K
r_b
I_b
F
A
r_c
I_c
H
Q
G
O
I
N
T
J
C
R
D
P
M
B
L
U
E
V
I_a
S

A-6 — AS FÓRMULAS DE EULER

6.1 — Relação dos cinco raios

Considerando a figura da página anterior, verificamos inicialmente que as bissetrizes $\overline{AI_a}$ e $\overline{AI_b}$ são perpendiculares e que $\overline{EF}$ é um diâmetro perpendicular a $\overline{BC}$ em seu ponto médio D.

No trapézio $I_b JLI_c$, temos

$$\left.\begin{array}{l} BJ = p \\ CL = p \end{array}\right\} \implies JC = BL$$

Como D é médio de $\overline{JL}$, $\overline{DF}$ é base média, sendo

$$DF = \frac{r_b + r_c}{2} \qquad (1)$$

Temos ainda

$$BM = p - b = AU - AC = UC = CR \implies \left\{\begin{array}{l} CR = BM \\ RD = DM \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} C\widehat{I}E = E\widehat{C}I = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \\ C\widehat{I_a}E = I_a\widehat{C}E \end{array}\right\} \implies EB = EC = EI = EI_a$$

Se D e E são médios de $\overline{RM}$ e $\overline{II_a}$, então podemos escrever

$$DE = \frac{r_a - r}{2} \qquad (2)$$

Como $DE + DF = 2R$,

$$2R = \frac{r_b + r_c}{2} = \frac{r_a - r}{2} \implies$$

$$\implies \boxed{4R = r_a + r_b + r_c - r}$$

6.2 — Distância do incentro ao circuncentro

No triângulo OIE, temos

$OI^2 = OE^2 + IE^2 - 2OE \cdot ET,$ mas

$IE^2 = EC^2 = 2R \cdot ED \implies$

$\implies OI^2 = R^2 + 2R(ED - ET) = R^2 - 2R(ET - ED) \implies$

$$\implies \boxed{OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}}$$

6.3 — Distância do circuncentro a um exincentro

No triângulo OI_aE, temos

$OI_a^2 = OE^2 + EI_a^2 + 2 \cdot OE \cdot ES,$ mas

$EI_a^2 = CE = 2R \cdot ED \implies$

$\implies OI_a^2 = R^2 + 2R(ED + ES) \implies$

$$\implies \boxed{\begin{array}{l} OI_a = \sqrt{R^2 + 2R\,r_a} \\ OI_b = \sqrt{R^2 + 2R\,r_b} \\ OI_c = \sqrt{R^2 + 2R\,r_c} \end{array}}$$

e, analogamente,

e

6.4 — Distância do incentro a um exincentro

Temos

$II_a = 2\,EI_a = 2\,CE^2$

$II_a^2 = 4 \cdot CE^2 \implies$

$\implies II_a^2 = 4 \cdot 2R \cdot ED,$ mas $ED = \dfrac{r_a - r}{2} \implies$

$\Longrightarrow$

$$II_a = 2\sqrt{R(r_a - r)}$$ e, analogamente,

$$II_b = 2\sqrt{R(r_b - r)}$$ e

$$II_c = 2\sqrt{R(r_c - r)}$$

6.5 — Distância entre dois exincentros

Calculemos I_bI_c.

$FI_b = FI_c$, sendo $\overline{CF}$ mediana no triângulo retângulo I_bCI_c.

$2CF = I_bI_c$

$I_bI_c^2 = 4\ CF = 4 \cdot 2R \cdot FD$,

mas $FD = \dfrac{r_b + r_c}{2}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$$I_bI_c = 2\sqrt{R(r_b + r_c)}$$ e, analogamente,

$$I_aI_b = 2\sqrt{R(r_a + r_b)}$$ e

$$I_aI_c = 2\sqrt{R(r_a + r_c)}$$

6.6 — Exemplos

6.6.1 — Calcular o raio do círculo circunscrito a um triângulo sabendo que o circuncentro e os exincentros relativos a *a* e *b* formam um triângulo equilátero de 4 m de lado.

Solução

Pelas fórmulas de Euler, temos

$OI_a = \sqrt{R^2 + 2R\ r_a}$

$OI_b = \sqrt{R^2 + 2R\ r_b}$

$I_aI_b = 2\sqrt{R(r_a + r_b)}$

Das duas primeiras vemos que $r_a = r_b$.

Na última, temos

$$4 = 2\sqrt{R(2r_a)} \qquad \text{ou}$$

$$R \cdot r_a = 2.$$

Levando na primeira, temos

$$16 = R^2 + 2 \cdot 2 \Longrightarrow R^2 = 12 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{R = 2\sqrt{3}\,m}$$

6.6.2 — No problema anterior, calcule os raios dos círculos exinscrito e inscrito.

Solução

Do problema anterior,

$$\left.\begin{array}{l} R \cdot r_a = 2 \\ R = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow r_a = r_b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Calculamos r_c e r pelas relações

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \qquad \text{e}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

6.6.3 — Em um triângulo de lados 4, 6 e 8, calcule, se possível, o comprimento da tangente traçada pelo circuncentro ao círculo inscrito.

Solução

Calculemos a área do triângulo.

$$S = \sqrt{9(1)(3)(5)} = 3\sqrt{15} \text{ a.a.}$$

Os raios dos círculos inscrito e circunscrito medem

$$S = pr \Longrightarrow 3\sqrt{15} = 9r \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$abc = 4RS \Longrightarrow 4 \cdot 6 \cdot 8 = 4 \cdot R \cdot 3\sqrt{15} \Longrightarrow R = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

A distância d entre o incentro e o circuncentro é dada por uma das fórmulas de Euler.

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

$$d^2 = \frac{16^2}{15} - 2\,\frac{16\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$d^2 = \frac{16^2}{15} - \frac{32}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d^2 = \frac{96}{15}.$$

Podemos, então, calcular a potência do circuncentro em relação ao círculo inscrito

$$Pot_{(I)}\,O = d^2 - r^2$$

$$Pot_{(I)}\,O = \frac{96}{15} - \frac{5}{3}$$

$$Pot_{(I)}\,O = \frac{71}{15}$$

Como a potência é positiva, o circuncentro é exterior ao círculo inscrito e, neste caso, a potência é dada pelo quadrado do segmento da tangente. Logo, o comprimento t pedido é

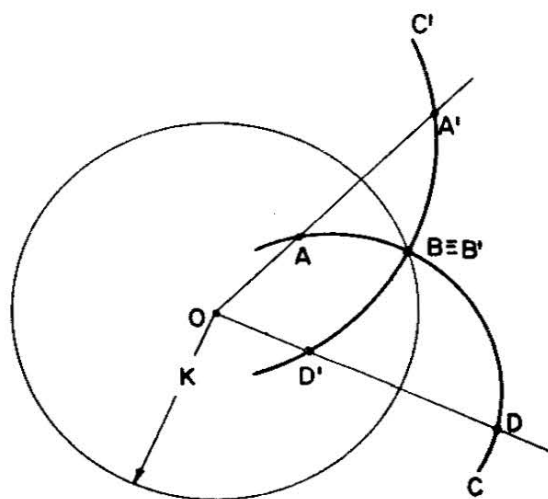
$$\boxed{t = \sqrt{\frac{71}{15}}}$$

A-7 — INVERSÃO

7.1 — Definição

Consideremos um ponto O de um plano Z. Chamamos de inversão positiva de centro O e raio K a transformação em Z que faz corresponder a cada ponto P de Z um ponto P′ da semi-reta OP, tal que

$$OP \cdot OP' = K^2$$

Os pontos do círculo de centro O e raio K são duplos. Se duas curvas C e C′ são inversas, a sua interseção está necessariamente sobre este círculo. Os pontos A e A′, B e B′, C e C′ são pontos inversos e escreveremos

$$A' = \text{Inv}(A), \quad B' = \text{Inv}(B) \quad \text{e} \quad C' = \text{Inv}(C)$$

e vice-versa.

7.2 — Produto de inversões de mesmo centro

Consideremos a inversão de centro O e raio K_1 que leva P em P_1 e a inversão de centro O e raio K_2 que leva P_1 em P_2. Então,

$$OP \cdot OP_1 = K_1^2 \qquad \text{e}$$

$$OP_1 \cdot OP_2 = K_2^2.$$

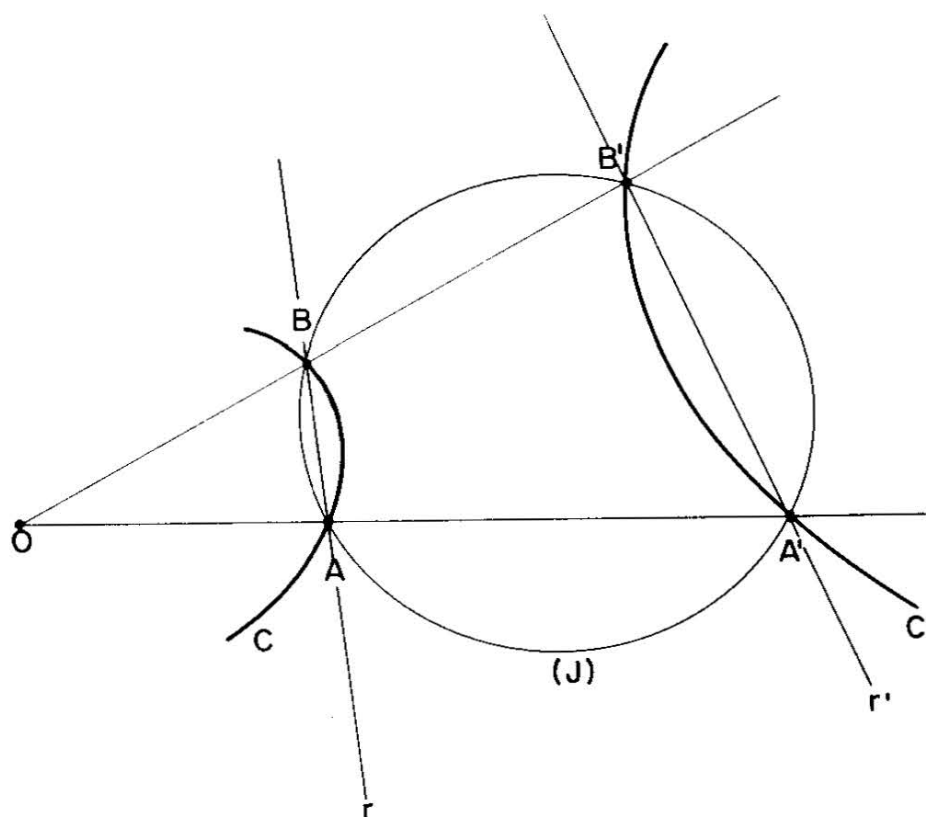
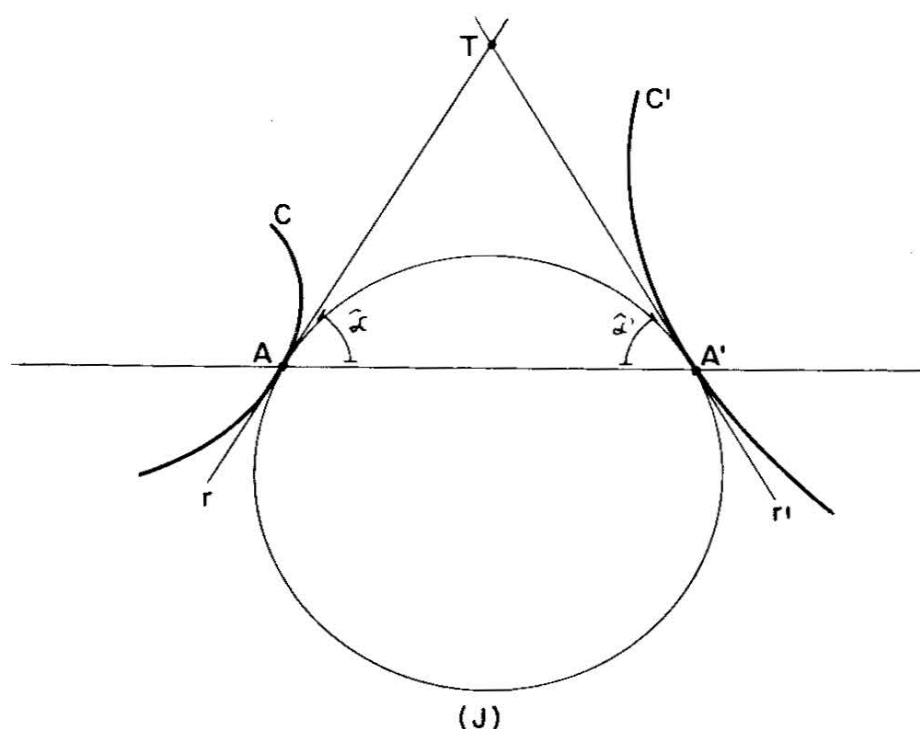
Dividindo membro a membro, obtemos

$$OP_2 = OP\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2$$

Vemos, então, que o produto de duas inversões de mesmo centro e raios K_1 e K_2 é uma homotetia de centro O e razão $\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2$

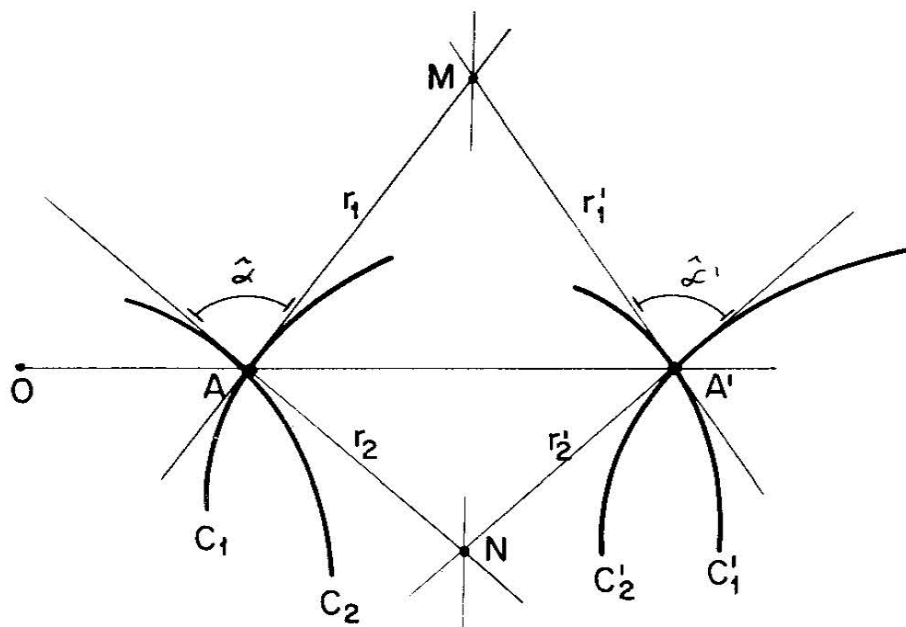
7.3 — Isogonalidade

7.3.1 — Teorema

Se dois pontos A e A′ pertencem, respectivamente, às curvas inversas C e C′, as tangentes a essas curvas em A e A′ formam ângulos iguais com a reta AA′.

Consideremos os pares de pontos inversos A e A′ e B e B′. Porque $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, os pontos A, B, A′ e B′ pertencem a um mesmo círculo, sendo r e r′ antiparalelas em relação a $\widehat{O}$. Se B tende a A, B′ tende a A′ e, quando $B \equiv A$, $B' \equiv A'$. O círculo (J) será, então, tangente às curvas C e C′ em A e A′, respectivamente, e as retas r e r′ serão tangentes a esse círculo e às curvas C e C′.

Vemos imediatamente que

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'.$$

7.3.2 — Teorema

Se duas curvas C_1 e C_2 formam ângulo $\widehat{\alpha}$ em um ponto de interseção A, as suas inversas C_1' e C_2', na mesma inversão, formarão ângulo $\widehat{\alpha}$ em um ponto de interseção A′, inverso de A.

Porque os triângulos MAA′ e NAA′ são isósceles, pelo teorema anterior, concluímos imediatamente que

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}'.$$

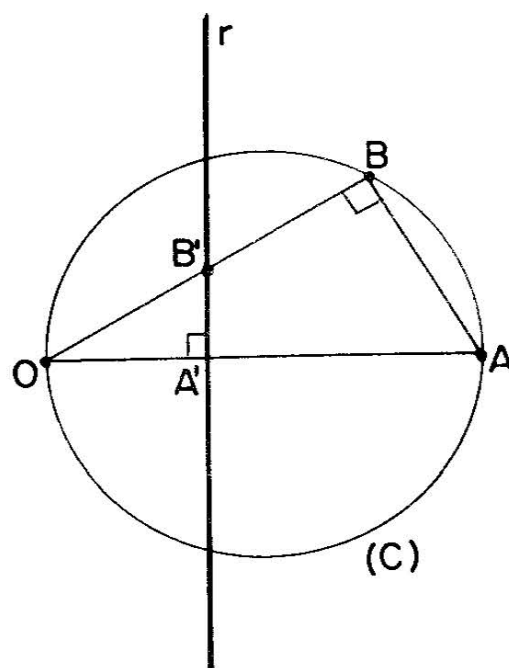
7.4 — Transformação do círculo por inversão

7.4.1 — O pólo é um ponto do círculo

Quando o pólo O de inversão é um ponto do círculo, a figura inversa do círculo é uma reta perpendicular ao diâmetro que passa por O.

Seja A′ do diâmetro $\overline{OA}$ tal que

$$OA \cdot OA' = K^2.$$

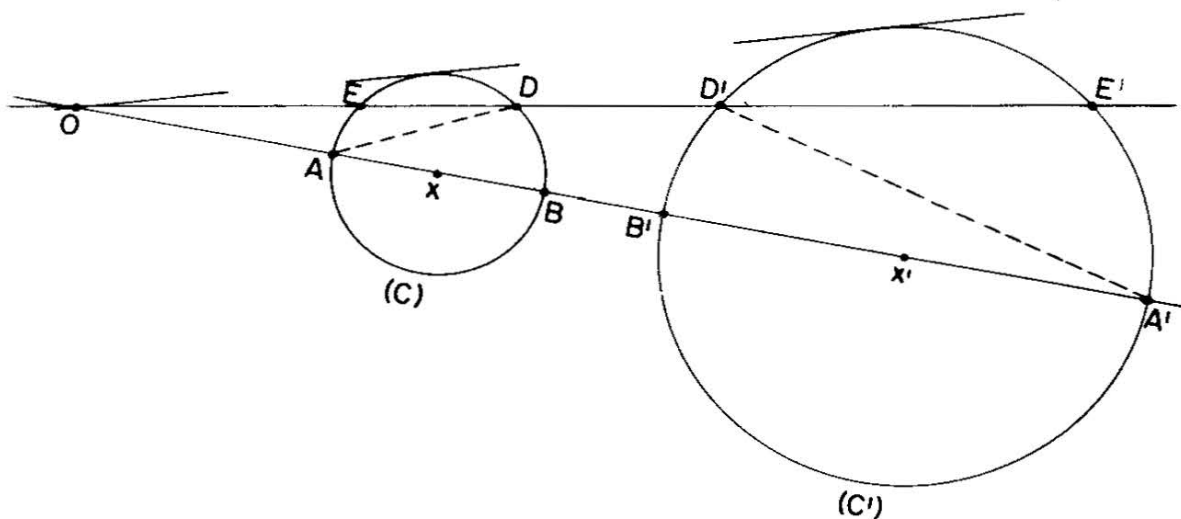
Consideremos a reta r, que contém A′ e é perpendicular a $\overline{OA}$. Seja B um ponto do círculo.

Vamos provar que B′, ponto que r intercepta $\overline{OB}$, é o inverso de B.

Sendo os triângulos OA′B′ e OBA semelhantes, temos

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} \Longrightarrow OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = K^2$$

Então, como B′ = Inv (B), mostramos que

r = Inv (C).

7.4.2 — O pólo não pertence ao círculo

Quando o pólo de inversão não pertence ao círculo, a sua figura inversa é um outro círculo homotético do primeiro, numa homotetia de mesmo centro.

Sejam A′ = Inv(A) e B′ = Inv(B).

Consideremos o círculo de diâmetro $\overline{A'B'}$. Temos, então,

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = K^2 \Longrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

o que mostra que (C') é homotético de (C), numa homotetia de centro O. Temos ainda, considerando uma secante qualquer,

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{B'D'} \Longrightarrow \Delta\, OAD \sim \Delta\, OD'A' \Longrightarrow \frac{OD}{OA'} = \frac{OA}{OD'} \Longrightarrow$$

$$OD \cdot OD' = OA \cdot OA' = K^2.$$

Então, $C' = \text{Inv}\,(C)$.

7.5 — Distância entre dois pontos inversos

Sejam $A' = \text{Inv}(A)$ e $B' = \text{Inv}(B)$.

Porque as retas AB e A'B' são antiparalelas, os triângulos OAB e OB'A' são semelhantes. Logo,

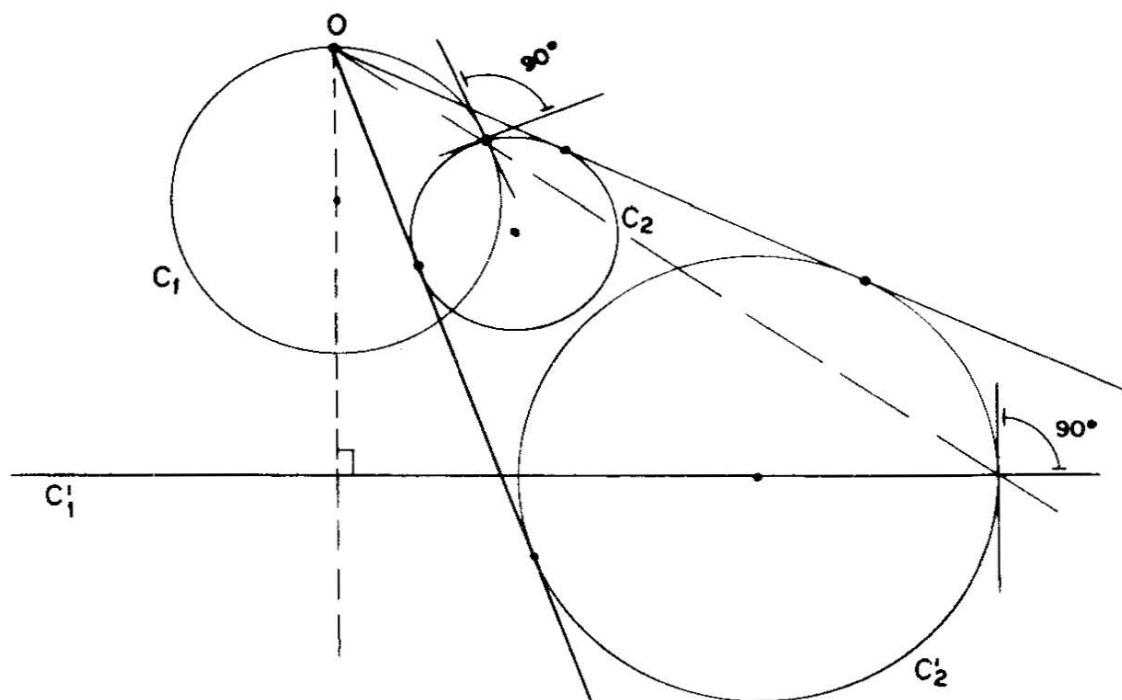
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A'B' = AB \cdot \frac{OB'}{OA}.$$

Mas $OB' = \dfrac{K^2}{OB}$. Então,

$$\boxed{A'B' = AB \cdot \frac{K^2}{OA \cdot OB}}$$

7.6 — Observação

Se dois círculos são ortogonais, a inversão cujo pólo é um ponto de um dos círculos transforma estas figuras num círculo e numa reta que passa pelo centro deste.

Este fato decorre imediatamente de 7.4 e 7.3.2.

7.7 — Aplicações

1) Demonstrar que, em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. (Teorema de Ptolomeu).

Sugestão

Transforme círculo em reta, numa inversão de pólo A. Como $B'D' = B'C' + C'D'$, aplique o resultado encontrado em 7.4.

2) Considere um quadrilátero ABCD. Prove que, se os círculos circunscritos aos triângulos ABC e ADC forem ortogonais, os círculos circunscritos aos triângulos ABD e CBD também o serão.

Sugestão

Transforme os círculos (ABC) e (ADC) em retas, por inversão de pólo A. Lembre que essas retas são perpendiculares.

3) Considerando o quadrilátero do problema anterior, se *a*, *b*, *c* e *d* são os comprimentos dos lados, e *p* e *q*, os das diagonais, prove que

$$p^2q^2 = a^2c^2 + b^2d^2$$

4) Os pontos A, B, C e D formam uma divisão harmônica. Transformemos, por inversão de pólo A, os pontos B, C e D. Se $B' = \text{Inv}(B)$, $C' = \text{Inv}(C)$ e $D' = \text{Inv}(D)$, prove que B' é o ponto médio de $\overline{C'D'}$.

5) Se um círculo é tangente internamente ao círculo circunscrito de um triângulo ABC e é tangente em P e Q a dois lados do triângulo, prove que o incentro do triângulo ABC é o ponto médio de $\overline{PQ}$.

Sugestão

Transforme os dois círculos, utilizando uma inversão de pólo A e raio $\overline{AI}$.

RESPOSTAS DOS TESTES

8 — B	15 — E	31 — D	38 — A
9 — D	16 — C	32 — C	39 — C
10 — D	17 — D	33 — B	40 — B
11 — C	18 — C	34 — A	51 — D
12 — A	19 — C	35 — C	52 — B
13 — C	20 — C	36 — E	53 — A
14 — B	30 — C	37 — A	54 — C

55 — C
56 — C
57 — D
58 — E
59 — D
60 — A
61 — C
62 — C
63 — D
64 — D
65 — B
66 — B
67 — A
68 — C
69 — C
70 — D
71 — A
72 — C
73 — E
74 — A
75 — B
76 — B
77 — B
78 — A
79 — A
80 — C
91 — D
92 — C
93 — D
94 — D
95 — D
96 — B
97 — B
98 — E
99 — A
100 — C
101 — C
102 — D
103 — D
104 — C
105 — A
106 — E
107 — E
108 — A
109 — B
110 — C
111 — B
112 — C
113 — C
114 — C
115 — D
116 — D
117 — B
118 — B
119 — C
120 — A
121 — B
122 — C
123 — B
124 — C
125 — A
126 — D
127 — E
128 — C
129 — D
130 — C
131 — B
132 — E
133 — B
134 — B
135 — C
136 — C
137 — D
138 — C
139 — B
140 — D
155 — C
156 — D
157 — D
158 — C
159 — A
160 — E
161 — C
162 — A
163 — C
164 — D
165 — B
166 — A
167 — D
168 — B
169 — D
170 — C
171 — A
172 — D
173 — B
174 — C
175 — A
176 — D
177 — C
178 — D
179 — C
180 — B
181 — C
206 — C
207 — A
208 — C
209 — C
210 — D
211 — C
212 — D
213 — C
214 — D
215 — A
216 — E
217 — E
218 — B
219 — C
220 — C
221 — D
222 — C
223 — D
224 — A
225 — C
226 — A
227 — B
228 — D
229 — E
230 — B
231 — B
232 — D
233 — C
234 — C
235 — E
236 — C
237 — C
238 — D
239 — A
240 — A
241 — B
242 — C
243 — D
244 — E
245 — B
246 — B
247 — D
248 — C
249 — D
250 — B

É membro da comissão de olímpiadas da Sociedade Brasileira de Matemática e tem vários livros publicados no Brasil e no exterior. Uma de suas atividades permanentes é a de preparação de alunos para os vestibulares do IME e do ITA.

MIGUEL JORGE é engenheiro e licenciado em Matemática. Foi professor do IME e leciona na Fundação Getúlio Vargas e no Colégio Santo Inácio, no Rio de Janeiro. Participou do julgamento de provas em olimpíadas internacionais de Matemática e da elaboração de questões para o Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB). Além de autor de diversos livros, uma de suas atividades é a de preparação de alunos para os vestibulares do IME e do ITA.

Lançado pela primeira vez há quase trinta anos, este *Geometria II*, considerado um *best seller* na matéria, retorna ao mercado com a mesma proposta: apresentar a Geometria de forma clara e objetiva.

Aqui são abordados diversos assuntos e teoremas inexistentes em outras publicações brasileiras, tais como: os teoremas de Menelaus e Ceva, para os triângulos; de Ptolomeu, Euler e Hiparco, para os quadriláteros; potência de um ponto em relação a uma circunferência; eixo radical; homotetia; inversão, além de exercícios com variados graus de dificuldade.

Indicado para professores e alunos que se preparam para concursos difíceis, como os do IME, do ITA, das escolas militares, ou ainda, os que se preparam para as olimpíadas de Matemática.

Honilton Medeiros

ISBN 85-903057-1-6

9 788590 305712